Chapitre 1

Réduction des endomorphismes

E est un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps $\mathbb{K}(= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$,

$\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ est une base de E

$\mathcal{L}(E) = Hom(E, E)$ ensemble des applications linéaires de E vers E (ou endomorphismes)

$\mathcal{L}(E)$ muni des opérations suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ (f, g) & \to & f + g \end{array} \qquad \begin{array}{l} \mathbb{K} \times \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E) \\ (\lambda, f) \to \lambda f \end{array}$$

est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

$\mathcal{L}(E)$ muni des opérations suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ (f, g) & \to & f + g \end{array} \qquad \begin{array}{l} \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E) \\ (f, g) \to f \circ g \end{array}$$

est un anneau unitaire non commutatif

On identifie $\mathcal{L}(E) \backsimeq \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ensemble des matrices carrées d'ordre n

$M(f + g) = M(f) + M(g), \;\; M(f \circ g) = M(f)M(g)$

$\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont des $\mathbb{K}$ - algébres, $J = Id_E \;\; I_n = I$

1.1 Valeurs propres, Vecteurs propres et Polynômes caractéristiques

Définition 1.1.1 *a) $v \in E$ est un vecteur propre de $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ si et seulement si*

- *(i) $v \neq 0$*
- *(ii) $\exists \lambda \in \mathbb{K} \; / \;\; \varphi(v) = \lambda v$*

b) $\lambda \in \mathbb{K} \; / \; \varphi(v) = \lambda v$ est dite valeur propre associée à v

Remarque 1.1.2 *λ est la valeur propre associée à $v \Longleftrightarrow \varphi(v) = \lambda v \Longleftrightarrow v \in$* $\ker(\varphi - \lambda I)$ *c'est-à-dite que* $\det(\varphi - \lambda I) = 0$

Soit $M(\varphi) = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} = A$

$$\begin{array}{rcl}\det(A-\lambda I) & = & \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^n\lambda^n + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda^{n-k} \\ \alpha_1 & = & (-1)^{n-1}[a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}] = Tr(A) \quad \text{appelé trace de } A \end{array}$$

$\det(A-\lambda I)$ est un polynôme de degré n noté $P_A(\lambda)$

Définition 1.1.3 *Le polynôme $P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I)$ est dit polynôme caractéristique de A*

Théorème 1.1.4 *Le polynôme caractéristique est un invariant de $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ ie indépendant de la base choisie.*

Preuve. Soit $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ une seconde base de E et B la matrice de passage de $\mathcal{U}$ à $\mathcal{V}$ ie $B = [v_1, v_2, \cdots, v_n]$. Alors $A^* = B^{-1}AB$ est la matrice de φ dans B

$$\begin{array}{rcl}\det(A^*-\lambda I) & = & \det(B^{-1}AB - B^{-1}\lambda IB) = \det[B^{-1}(A-\lambda I)B] \\ P_{A^*}(\lambda) & = & \det B^{-1}\det(A-\lambda I)\det B = \det(A-\lambda I) = P_A(\varphi)\end{array}$$

■

Remarque 1.1.5 *Le polynôme caractéristique ne dépend que de φ, on le note $P_\varphi(\lambda)$.*

Les valeurs propres de φ sont constituées des zéros de $P_\varphi(X)$ ie λ est valeur propre de φ si et seulement si $P_\varphi(\lambda) = 0$

Les coéfficients de $P_\varphi(X)$ sont des invariants de φ en particulier $\alpha_1 = Tr(\varphi)$ et $\alpha_n = \det(\varphi)$

Définition 1.1.6 *L'ensemble des valeurs propres de A dans $\mathbb{K}$ est appelé spectre de A et est noté $spec_{\mathbb{K}}(A)$. Il dépend du corps $\mathbb{K}$ considéré.*

Exemple 1.1.7 *Soit* $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

Determiner $spec_{\mathbb{Q}}(A),\ spec_{\mathbb{R}}(A),\ spec_{\mathbb{C}}(A)$

$P_A(X) = \det(A-XI) = \begin{vmatrix} -X & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -X & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -X & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -X \end{vmatrix} = X^4 - X^2 - 2 = (X^2-2)(X^2+1)$

et donc $spec_{\mathbb{Q}}(A) = \emptyset,\ spec_{\mathbb{R}}(A) = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\},\ spec_{\mathbb{C}}(A) = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, i, -i\}$

Théorème 1.1.8 *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors chaque polynôme de degré non nul, posséde au moins une racine*

Preuve. En effet, $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, en vertu du théorème de Dalambert, chaque polynôme admet au moins une racine. ■

1.2 Sous espaces propres

Définition 1.2.1 *On appelle sous espace propore associé à une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$, le noyau de $(\varphi - \lambda I)$, ie $\ker(\varphi - \lambda I)$ noté E_λ. E_λ contient 0 et le vecteur propre associé à λ, par suite $\dim E_\lambda \geq 1$*

Théorème 1.2.2 *Soient $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$, m valeurs propres distintes de $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Alors la somme des sous espaces $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} \cdots + E_{\lambda_m}$ est directe ie $E_{\lambda_i} \cap E_{\lambda_j} = \{0\}$ pour tout $i \neq j$.*

Preuve. Elle se fait par récurrence sur m. Montrons cette proposition pour $m = 2$. Il suffit de montrer que $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$. Soit V un élément de $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2}$. On a alors

$$u(V) = \lambda_1 V = \lambda_2 V \Longrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) = V \Longrightarrow V = 0$$

car λ_1 et λ_2 sont distintes

Supposons que la propriété est vraie à l'ordre $m-1$, montrons la à l'ordre m.

Il suffit de montrer que 0 se décompose de manière unique en somme d'éléments de E_{λ_i} autrement dit que

$$\forall i,\ V_i \in E_{\lambda_i} \text{ et } 0 = V_1 + V_2 + \cdots + V_m \Longrightarrow \text{ pour tout } i,\ V_i = 0$$

En effet on applique u. On obtient

$$0 = u(V_1) + u(V_2) + \cdots + u(V_m) \Longrightarrow \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \cdots + \lambda_m V_m = 0 \quad (*)$$

On a en multipliant par ailleurs par λ_m

$$0 = V_1 + V_2 + \cdots + V_m \Longrightarrow \lambda_m V_1 + \lambda_m V_2 + \cdots + \lambda_m V_m = 0 \quad (**)$$

En retranchant $(*)$ de $(**)$ on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda_1 - \lambda_m)V_1 + (\lambda_2 - \lambda_m)V_2 + \cdots + (\lambda_{m-1} - \lambda_m)V_{m-1} \\ &\Longrightarrow \forall\ i\ \in \{1, 2, \cdots, m-1\}\ (\lambda_m - \lambda_i)V_i = 0 \end{aligned}$$

car par hypothèse, les $m-1$ sous-espaces E_{λ_i} sont somme directes

$$\Longrightarrow \forall\ i \in \{1, 2, \cdots, m-1\},\ V_i = 0$$

car les valeurs propres sont distinctes.

En repportant dans $(*)$ on obtient $V_m = 0$. ■

Définition 1.2.3 *La multiplicté d'une valeur propre est sa multiplicité en tant que zéros de $P_\varphi(X)$.*

Remarque 1.2.4 *Soit E_λ un sous espace propore associé à une valeur propre λ de $\varphi \in \mathcal{L}(E), \forall V = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \in E_\lambda,\ \varphi(V) = \lambda V \Longleftrightarrow (\varphi - \lambda I)V = 0$ soit matriciellement*

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad \ddots \quad \ddots \quad \ddots \quad \ddots \quad \ddots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

Théorème 1.2.5 *Si λ est une valeur propre de $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ telle que rang$(\varphi - \lambda I) = r$ alors $\dim E_\lambda = n - r$*

Remarque 1.2.6 *Si $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ sont des valeurs propres de $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ distinctes 2 à 2, de multiplicité $m_1, m_2, \cdots, m_r$, alors*

$$\begin{aligned} P_\varphi(X) &= (X-\lambda_1)^{m_1} \cdots (X-\lambda_r)^{m_r} Q(X),\ \textit{avec } Q(\alpha) \neq 0, \forall \alpha \in \mathbb{K} \\ &\Longrightarrow m_1 + m_2 + \cdots\cdots + m_r \leq n = \dim E \end{aligned}$$

Théorème 1.2.7 *Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de multiplicité m de $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ alors*

$$\dim E_\lambda \leq m$$

Preuve. Si $\dim E_\lambda \geq m+1$, alors il existe une base $\{V_1, V_2, \cdots, V_m, V_{m+1}, \cdots, V_n\}$ contenant V telle que $V_1, V_2, \cdots, V_m, V_{m+1} \in E_\lambda$. Ainsi relativement à V, la matrice $M(\varphi)$ prend la forme suivante

$$M(\varphi) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & . & 0 \\ 0 & \lambda & . & . \\ . & . & . & 0 \\ 0 & . & 0 & \lambda \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} . & . & . & . \\ . & . & C & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & 0. & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_{11} & . & . & b_{1s} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ b_{s1} & . & . & b_{ss} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$
P_\varphi(X) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda - X & 0 & . & 0 \\ 0 & \lambda - X & . & . \\ . & . & . & 0 \\ 0 & . & 0 & \lambda - X \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & & . & \\ . & . & C & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_{11} - X & . & . & b_{1s} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ b_{s1} & . & . & b_{ss} - X \end{bmatrix} \end{bmatrix}
$$

$$
P_\varphi(X) = (\lambda - X)^{m+1} \det(B - XI_s)
$$

λ est de multiplicité $m+1$ d'où la contradiction. ■

1.2.1 Diagonalisation

Définition 1.2.8 *Un endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ est dit diagonalisable si et seulement si il existe une base V dans laquelle la matrice $M(\varphi)$ est diagonale.*

Remarque 1.2.9 *Si φ est diagonalisable dans une base $\mathcal{V}$, alors $\mathcal{V}$ est constituée de vecteurs propres de φ uniquement. Réciproquement si E admet une seconde base constituée de vecteurs propres de φ uniquement, alors φ est diagonalisable dans cette base.*

Corollaire 1.2.10 *Pour chaque endomorphisme φ les assertions suivantes sont équivalentes*

- *i) φ est diagonalisable*
- *ii) Les deux conditions suivantes sont vérifiées*
  1. *$P_\varphi(X)$ est totalement réductible*
  2. *La dimension de chaque sous-espace propre est égale à la multiplicité de sa valeur propre associée.*

Preuve. i) $\Longrightarrow$ ii) Il eixte une base $\{v_1, \cdots v_n\}$ telle que $M(\varphi)$ soit diagonale, donc il existe $G \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n)$ régulière telle que $M(\varphi) = G^{-1}AG = A^* = [a_{ij}\delta_{ij}]$

$$
P_\varphi(X) = P_{A^*}(X) = (a_1^* - X) \cdots (a_n^* - X)
$$

d'où P_φ est totalement réductible.

Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes et E_{λ_j} le sous-espace propre associé à λ_j, $j = 1, \cdots r$

$$
\dim \left(\sum_{j=1}^{r} E_{\lambda_j} \right) = \dim \left(\bigoplus_{j=1}^{r} E_{\lambda_j} \right) = \sum_{j=1}^{r} E_{\lambda_j} = \sum_{j=1}^{r} m_j
$$

avec m_j = multiplicité de la valeur propre λ_j

Si $m_{j_0} \gneqq \dim E_{\lambda_{j0}}$

$$
\Longrightarrow \sum_{j=1}^{r} m_j = m_{j_0} + \sum_{j \neq j_0} m_j \gneqq \dim E_{\lambda_{j0}} + \dim \bigoplus_{j \neq j_0} E_{\lambda_{j0}}
$$

$$n = \sum_{j=1}^{r} m_j \gneqq \dim E_{\lambda_{j0}} + \dim \bigoplus_{j \neq j_0} E_{\lambda_{j0}}$$

Ce qui est contraire avec φ diagonale

ii) $\Longrightarrow$ i) $P_\varphi(X)$ totalement réductible, soient $\lambda_1, \cdots \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de φ de multiplicités respectives m_j, $j = 1, \cdots r$ avec $\dim E_{\lambda_j} = m_j$

$$\dim \left(\bigoplus_{j=1}^{r} E_{\lambda_j} \right) = \sum_{j=1}^{r} m_j = n \Longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{r} E_{\lambda_j} = E$$

Par conséquent, E admet une base formée de vecteurs propres relativement à laquelle $M(\varphi)$ est diagonale. ■

Proposition 1.2.11 *Dire que φ est diagonalisable revient à dire que $E = \bigoplus_{\lambda \in spec_{\mathbb{K}}(\varphi)} E_\lambda$, où $E_\lambda = \ker(\varphi - \lambda I)$.*

Preuve de la proposition. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ $(r \leq n)$ les valeurs propres deux à deux distinctes de φ avec pour ordres de multiplicité $m_1, m_2, \cdots, m_r$

$i \neq j \Longrightarrow E_i \cap E_j = \{0\}$, $\forall i, j \in [1, r]$

Soit $\mathcal{V}$ une base de E constituée de vecteurs propres, les éléments de $\mathcal{V}$ se répartissent en paquets logés dans les divers sous espaces propres

Soit $\{V_{j1}, \cdots V_{jk}\} \subset E_{\lambda j}$ ie base de $E_{\lambda j}$,

$\forall V \in \mathcal{V}$, on a $V = V_1 + \cdots + V_r$, $V_j \subset E_{\lambda j}$

$$E = \sum_{j=1}^{n} E_{\lambda j} = \bigoplus_{j=1}^{r} E_{\lambda j}$$

Réciproquement si $E = \bigoplus_{j=1}^{r} E_{\lambda j}$, E admet une base constituée de vecteurs propres uniquement $\Longrightarrow \varphi$ est diagonalisable ■

Théorème 1.2.12 *Si $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ admet n valeurs propres distinctes 2 à 2 alors φ est diagonalisable.*

Preuve. Soients $E_1, E_2, \cdots, E_n$ les sous espaces propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ $\dim E_j \geq 1, \forall j \in [1, n]$

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 + \cdots + E_n = \bigoplus_{j=1}^{n} E_j \Longrightarrow \dim E = \dim \bigoplus_{j=1}^{n} E_j \geq n \\ E &= \bigoplus_{j=1}^{n} E_j \Longrightarrow \dim E = n \Longrightarrow \varphi \text{ est diagonalisable} \end{aligned}$$

■

1.2.2 Exemples et Applications

Exemple 1.2.13 *Soit* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

— *Recherche de valeurs propres*

$$P_A(X) = \det(A - XI) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -X & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -X & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -X \end{vmatrix}$$

Ajoutons la première ligne à toutes les autres lignes

$$\begin{vmatrix} -X & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -X & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -X & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -X \end{vmatrix} = (1-X)^3 \begin{vmatrix} -X & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Retranchons à la première ligne la somme des trois autres lignes. On obtient ainsi le déterminant trigonal $P_A(X) = (1-X)^3(-X-3) = (X-1)^3(X+3)$, $\Longrightarrow$ $spec(A) = \{1, -3\}$

— *Recherche de sous espaces propres*

Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, *la résolution de l'équation* $AX = X$ *conduit à* $x - y - z - t = 0$,

E_1 *est de dimension* 3, *on peut donc écrire* $E_1 = Vect \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

De même pour l'équation matricielle $AX = -3X$ *conduit au système*

$$\begin{cases} 3x + y + z + t = 0 \\ x + 3y - z - t = 0 \\ x - y + 3z - t = 0 \\ x - y - z + 3t = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow y = z = t = -x,$$

soit $E_{-3} = vect \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

— *En conclusion on peut dire que A est diagonalisable car* $\dim E_1 + \dim E_{-3} = 4 = \dim \mathbb{R}^4$

On peut prendre comme matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs *propres, la matrice* $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *on trouve alors* $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

et $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exemple 1.2.14 *D'abord pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, puis pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, étudier la possibilité de diagonaliser l'endomorphisme u de $\mathbb{K}^3$, qui est déterminée dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) par la matrice*

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

On commence par calculer $P_u(X) = X^3 + 4X$.

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *Ici $P_u(X) = X(X^2 + 4)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc u nest pas diagonalisable.*
- $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *Ici $P_u(X)$ est scindé sur $\mathbb{C}$. Admettant 3 valeurs propres distinctes :*

$$\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 2i, \ \ \lambda_3 = -2i$$

l'endomorphisme $u \in \mathbb{C}^3$ est diagonalisable.

Les sous espaces propres associés E_1,E_2, E_3 sont donnés par les systèmes

$$(L_1) \left\{ \begin{array}{rcl} 2\zeta_2 & = & 0 \\ -\zeta_1 + \zeta_3 & = & 0 \\ -2\zeta_2 & = & 0 \end{array} \right. , \ (L_2) \left\{ \begin{array}{rcl} 2i\zeta_1 + 2\zeta_2 & = & 0 \\ -\zeta_1 + 2i\zeta_2 + \zeta_3 & = & 0 \\ -2\zeta_2 + 2i\zeta_3 & = & 0 \end{array} \right. , \ (L_3) \left\{ \begin{array}{rcl} -2i\zeta_1 + 2\zeta_2 & = & 0 \\ -\zeta_1 + 2i\zeta_2 + \zeta_3 & = & 0 \\ -2\zeta_2 - 2i\zeta_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\text{soit} \ \ (L_1') \left\{ \begin{array}{rcl} \zeta_2 & = & 0 \\ -\zeta_1 + \zeta_3 & = & 0 \end{array} \right. , \ (L_2') \left\{ \begin{array}{rcl} i\zeta_1 + \zeta_2 & = & 0 \\ \zeta_2 + i\zeta_3 & = & 0 \end{array} \right. , \ (L_3') \left\{ \begin{array}{rcl} -i\zeta_1 + \zeta_2 & = & 0 \\ -\zeta_2 + i\zeta_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Donc $E_1 = lin\{(1, 0, 1)\}$, $E_2 = lin\{(-1, i, 1)\}$, $E_3 = lin\{(-1, -i, 1)\}$. Par conséquent la matrice de passage est $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & i & -i \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -2i & 1 \\ -1 & 2i & 1 \end{bmatrix}$,

$MP = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2i \\ 0 & -2i & -2 \\ 0 & 2i & -2i \end{bmatrix}$, $P^{-1}MP = D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{bmatrix}$

Applications 1 : Puissance q^{eme} d'une matrice diagonalisable

Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice diagonalisable. Il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que la matrice $D = P^{-1}MP$ soit diagonale; on alors $M = PDP^{-1}$, P étant une projection, donc idempotent ($P^2 = P \Longrightarrow P^q = P$ de même que P^{-1}) on a $M^q = PD^qP^{-1}$

Exemple 1.2.15 *Reprenons la $\mathbb{C}-$matrice précédente* $M = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Nous avons $M = PDP^{-1}$ avec

$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & i & -i \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -2i & 1 \\ -1 & 2i & 1 \end{bmatrix}$, $D = 2i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

M n'étant pas inversible, il ne sera question que de puissance positives.

On calcule pour tout $k > 0$,

$D^k = (2i)^k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{bmatrix}$, $D^k P^{-1} = \frac{(2i)^k}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2i & 1 \\ (-1)^{k+1} & (-1)^k 2i & (-1)^k \end{bmatrix}$

et $M^k = PD^kP^{-1} = \frac{(2i)^k}{4} \begin{bmatrix} 1+(-1)^k & 2i(1+(-1)^{k+1}) & -(1+(-1)^k) \\ -i(1+(-1)^{k+1}) & 2(1+(-1)^k) & i(1+(-1)^{k+1}) \\ -(1+(-1)^{k+1}) & -2i(1+(-1)^{k+1}) & 1+(-1)^k \end{bmatrix}$

Exemple 1.2.16 *Discuter de la possibilité de diagonaliser l'endomorphisme $u \in \mathbb{K}^3$ qui est représentée dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) par la matrice* $M = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Application 2 : Résolution des systèmes de récurences

Dans le cas de p équations de récurence linéaire faisant intervenir p suites $(u_n), (v_n), (w_n), \cdots$, le système s'écrit sous une forme matricielle

$$X_{n+1} = MX_n \qquad (7)$$

où X_n est une chronique vectorielle de p composantes $u_n, v_n, w_n, \cdots$, et M une matrice carré d'ordre p. La solution générale de (7) est

$$X_n = M^n X_0$$

Cette solution s'obtient aisément lorsque M est diagonalisable en écrivant $M = PDP^{-1}$, P est la matrice de passage, alors

$$M^n = PD^nP^{-1}$$

Exemple 1.2.17 *a) Diagonaliser la matrice* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) Calculer A^n

c) Soient les suites (u_n), (v_n), (w_n) définies par $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et les relations de récurrences :

$$\begin{cases} u_n = 3u_{n-1} + v_{n-1} - w_{n-1} \\ v_n = -u_{n-1} + v_{n-1} + w_{n-1} \\ w_n = u_{n-1} + v_{n-1} + w_{n-1} \end{cases}$$

calculer $u_n,\ v_n,\ w_n$ en fonction de n

$$\text{1) } A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \Longrightarrow P_A(X)=\begin{vmatrix} 3-X & 1 & -1\\ -1 & 1-X & 1\\ 1 & 1 & 1-X\end{vmatrix}=(X-1)\,(X-2)^2$$

$spect(A)=\{1,\ \textit{(simple)},\ 2\ \textit{(double)}\}$

$$E_1=\left\{\begin{array}{c} X\in\mathbb{R}^3\ /\left\{\begin{array}{c} 2x+y-z=0\\ -x+z=0\\ x+y=0\end{array}\right. \Longrightarrow x=z=-y\\ \Longrightarrow E_1=vect\{V_1\}\ avec\ V_1=(1,-1,1)\end{array}\right\}$$

$$\begin{aligned} E_2 &= \left\{X\in\mathbb{R}^3\ /\left\{\begin{array}{c} x+y-z=0\\ -x-y+z=0\\ x+y-z=0\end{array}\right. \Longrightarrow z=x+y\right\}\\ \Longrightarrow &\quad E_2=vect\{V_2,V_3\}\ avec\ V_2=(1,0,1),V_3=(0,1,1)\end{aligned}$$

Par conséquent A est diagonalisable et on a :

$$D=P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix},\ P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\Longrightarrow p^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 0 & 2^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\\ A^n &= \begin{bmatrix} -1+2^{n+1} & -1+2^n & 1-2^n\\ 1-2^n & 1 & -1+2^n\\ -1+2^n & -1+2^n & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

2)

$$\left\{\begin{array}{c} u_n=3u_{n-1}+v_{n-1}-w_{n-1}\\ v_n=-u_{n-1}+v_{n-1}+w_{n-1}\\ w_n=u_{n-1}+v_{n-1}+w_{n-1}\end{array}\right. \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} u_n\\ v_n\\ w_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{n-1}\\ v_{n-1}\\ w_{n-1}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_n\\ v_n\\ w_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^n\begin{bmatrix} u_0\\ v_0\\ w_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1+2^{n+1} & -1+2^n & 1-2^n\\ 1-2^n & 1 & -1+2^n\\ -1+2^n & -1+2^n & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_0\\ v_0\\ w_0\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} u_n&=\left(-1+2^{n+1}\right)u_0+\left(-1+2^n\right)v_0+\left(1-2^n\right)w_0\\ v_n&=\left(1-2^n\right)u_0+v_0+\left(-1+2^n\right)w_0\\ w_n&=\left(-1+2^n\right)u_0+\left(-1+2^n\right)v_0+w_0\end{aligned}$$

Pour $u_0=v_0=w_0=1$, on obtient

$$\begin{aligned} u_n &= -1+2^{n+1}\\ v_n &= 1\\ w_n &= -1+2^{n+1}\end{aligned}$$

1.2.3 Trigonalisation

Définition 1.2.18 *Un endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ est dit triangularisable si et seulement si il existe une base dans laquelle $M(\varphi)$ est triangulaire.*

Lemme 1.2.19 *Pour tout les endomorphismes, les conditions suivantes sont équivalentes*
- *(i) M_φ est triangulaire*
- *(ii) F_j le sous espace engendré par $u_1, u_2, \cdots, u_n$ est stable par φ (ie $\varphi(F_j) \subset F_j$)*

Preuve. (i) $\Longrightarrow$ (ii) $A = M_\varphi$ triangulaire supérieure, $A = [a_{ij}]_{1 \le i,j \le 1}$ / $a_{ij} = 0$ si $i > j$

$$\varphi(u_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_i = \sum_{i=1}^{j} a_{ij}u_i + \underbrace{\sum_{i=j+1}^{n} a_{ij}u_i}_{=0} = \sum_{i=1}^{j} a_{ij}u_i \in F_j$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i) $A = M(\varphi) = [a_{ij}]_{1 \le i,j \le 1}$ / $\varphi(F_j) \subset F_j$

$$\forall k = 1, 2, \cdots, j, \varphi(u_j) = \sum_{i=1}^{j} a_{ij}u_i \Longrightarrow a_{ij} = 0 \text{ si } i > j$$

■

Définition 1.2.20 *Un polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ est dit totalement réductible si et seulement si il a tout ces zéros dans $\mathbb{K}$ ie il peut se mettre sous la forme d'un produit de polynômes de premier degré.*

Théorème 1.2.21 *Un endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ est triangularisable si et seulement si $P_\varphi(X)$ est totalement réductible.*

Preuve. Soit $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ une seconde base $B = [v_1, v_2, \cdots, v_n]$
$\Longrightarrow$)

$$\begin{aligned} A^* &= B^{-1}AB \Longrightarrow P_\varphi(X) = P_{A^*}(X) = \det(A - XI) \\ A &= [a_{ij}]_{1 \le i,j \le n} \ / \ a_{ij} = 0 \text{ si } i > j \\ \det(A - XI) &= \prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - X) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow P_\varphi(X)$ est totalement réductible
$\Longleftarrow$)$P_\varphi(X) = \prod_{i=1}^{n}(a_{ii} - X)$

Soit λ une valeur propre de φ et v un vecteur propre associé à λ alors $v \neq 0$ et $\{v, u_2, \cdots, u_n\}$ est une base relativement à laquelle

$$M(\varphi) = \begin{bmatrix} \lambda & b_{12} & . & . & . & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & . & . & . & b_{2n} \\ 0 & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . \\ 0 & b_{n2} & . & . & . & b_{nn} \end{bmatrix} \text{ avec } D = \begin{bmatrix} b_{22} & . & . & . & b_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ b_{n2} & . & . & . & b_{nn} \end{bmatrix}$$ est une matrice carrée d'ordre $n-1$

$$P_\varphi(X) = \begin{vmatrix} \lambda - X & b_{12} & . & . & . & B_{1n} \\ 0 & b_{22} - X & . & . & . & b_{2n} \\ 0 & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . \\ 0 & b_{n2} & . & . & . & b_{nn} - X \end{vmatrix} = (\lambda - X)\det(D - XI_{n-1})$$

$= (\lambda - X)P_D(X)$

$P_D(X)$ est totalement réductible, D est la matrice d'un endomorphisme $\psi \in \mathcal{L}(E')$ avec $\dim E' = n-1 \Longrightarrow \psi$ est triangularisable ie il existe $\mathcal{W} = \{w_2, w_3, \cdots, w_n\}$ base de E' / $M(\psi)$ est triangulaire.

En posant $v_1 = v,\ v_2 = v + w_2, \cdots, v_n = v + w_n$

On obtient une base $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ relativement à laquelle

$$M(\varphi) = \begin{bmatrix} \lambda & \times & . & . & \times \\ 0 & \lambda_2 & \times & \times & \times \\ . & . & . & \times & \times \\ . & 0 & . & . & \times \\ 0 & . & . & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

Exemple 1.2.22 *Etudier la possibilité de trigonaliser l'endomorphisme $u \in \mathbb{K}$ représenté dans la base canonique par la matrice :* $M = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$

Le polynôme caractéristique est $P_u(X) = (X+2)^3$, nous avons $E_{-2} = \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\}$ donc u n'est pas diagonalisable, par contre $P_u(X)$ est scindé dans $\mathbb{R}$, donc u est trigonalisable. Nous choisissons un sous espace suplémentaire de $\mathbb{R}v_1$ avec $v_1 = (-1, 1, 1)$ par exemple le plan E' dont une base est (e_1, e_2). En utilisant que $e_3 = v_1 + e_1 - e_2$, nous calculons

$$\begin{aligned} u(e_1) &= -3e_1 + e_2 + 2(v_1 + e_1 - e_2) = 2v_1 - e_1 - e_2 \\ u(e_2) &= -3e_1 + e_2 + 4(v_1 + e_1 - e_2) = 4v_1 + e_1 - 3e_2 \end{aligned}$$

Etant donné que $u(v_1) = -2v_1$, nous en déduisons que

$$M(u; (v_1, e_1, e_2)) = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Soit p la projection de u parallélement à $\mathbb{R}v_1$ et u' l'endomorphisme de E', induit sur E' par $p \circ u$. Nous avons

$$M(u'; (e_1, e_2)) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

On vérifie que $P_u(X) = (X+2)^2$, nous sommes ramenés à diagonaliser u'. Le sous espace propre de u' associé à -2 est engendré par $v_2 = e_1 - e_2$. Dans toute base (v_2, v_3) de E', u' est représentée par une matrice au moins triangulaire supérieure. Pour se fixer les idées, choisissons $v_3 = e_2$, en utilisant $e_1 = v_2 + v_3$, nous concluons

$$\begin{aligned} u(v_2) &= u(e_1) - u(e_2) = -2v_1 - 2v_2, \\ u(v_3) &= 4v_1 + v_2 - 2v_3 \end{aligned}$$

Finalement la matrice de passage de la base (e_1, e_2, e_3) à la base (v_1, v_2, v_3) et son inverse s'écrivent

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \; \text{et } T = P^{-1}MP = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

1.3 Polynôme d'endomorphisme - Théorème de Cayley-Hamilton

E est un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}(= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$
$\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E, $S(X) \in \mathbb{K}[X]$, $\varphi \in \mathcal{L}(E)$

$$P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_m X^m, \;\; \varphi^0 = I, \; \varphi^k = \varphi \circ \varphi^{k-1}$$

Par substitution de φ à X dans $P(X)$, on obtient

$$P(\varphi) = \alpha_0 I + \alpha_1 \varphi + \cdots + \alpha_m \varphi^m \in \mathcal{L}(E)$$

Théorème 1.3.1 *L'application φ_u qui au polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ associe l'endomorphisme $P(u)$ de façon que*

$$P(X) = \sum_0^\infty \alpha_k X^k \longmapsto P(u) = \sum_0^\infty \alpha_k u^k, \quad (u^0 = Id_E)$$

est un morphisme de la $\mathbb{K}-$ algèbre $\mathbb{K}[X]$ dans la $\mathbb{K}-$ algèbre $\mathcal{L}(E)$

Preuve. En effet pour tout triplet $(\lambda, P, Q) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$, avec

$$P(X) = \sum_0^\infty \alpha_k X^k, \;\; Q(X) = \sum_0^\infty \beta_k X^k,$$

on calcule $u^p \circ u^q = u^{p+q}$,

$$\begin{array}{rcccl} P(u)+Q(u) & = & \sum_0^\infty (\alpha_k+\beta_k)u^k & = & (P+Q)(u) \\ P(u)\circ Q(u) & = & \sum_{k=0}^\infty \left(\sum_{j=0}^k \alpha_j\beta_{k-j}\right) u^k & = & (PQ)(u) \\ \lambda P(u) & = & \sum_{k=0}^\infty \alpha_k u^k & = & (\lambda P)(u) \end{array}$$

D'autre part $\varphi_u(1) = 0$ ■

$\chi : S(X) \longrightarrow S(\alpha)$ définie un morphisme de $\mathbb{K}-$ algébre

$[S(X)T(X)] \longrightarrow [S(\alpha)T(\alpha)]$

$$\begin{array}{rcc} \chi : \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ \chi(S+T) & \longrightarrow & \chi(S)+\chi(T) \\ \chi(\lambda S) & \longrightarrow & \lambda\chi(S) \\ \chi(ST) & \longrightarrow & \chi(S)\chi(T) \end{array}$$ χ est un $\mathbb{K}-$ algébre, χ est un idéal non nul de $\mathbb{K}[X]$

Puisque $\{\Im, \varphi, \varphi^2, \cdots, \varphi^{n^2}\}$ compte (n^2+1) éléments $\Longrightarrow \exists Q(X) \in \mathbb{K}[X]$ engendrant $\ker\chi$

Définition 1.3.2 *Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, on appelle polynôme minimal de φ, l'unique polynôme normalisé de degré minimal engendrant* $\ker\chi$, *noté $Q_\varphi(X)$*

Le polynôme minimal est le seul polynôme normalisé de degré minimal vérifiant

$$\chi[Q_\varphi(X)] \equiv 0 \quad ie \quad Q_\varphi(\varphi) = 0$$

Théorème 1.3.3 (Cayley-Hamilton) *Soit E uu sous-espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$. Si $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, alors le polynôme minimal $Q_\varphi(X)$ de φ divise le polynôme caractéristique $P_\varphi(X)$.*

Remarque 1.3.4 *Le théorème signifie que tout endomorphisme annule son polynôme caractéristique $P_\varphi(\varphi) = 0$*

Preuve. $M(\varphi) = A = [a_{ij}]_{1\le i,j\le n}$, $I_n = I$, $B(X) = [b_{ij}]_{1\le i,j\le n}$, avec $b_{ij} = a_{ij} - X\delta_{ij}$

$$B(X) = \begin{bmatrix} a_{11}-X & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-X & & a_{2n} \\ & & & \\ & & & \\ a_{n1} & & & a_{nn}-X \end{bmatrix}$$

On cossidère la comatrice $C(X)$ de $B(X)$ et ${}^tC(X) =$ matrice adjointe de $B(X)$

$$B(X)^tC(X) =^t C(X).B(X) = (\det B)I$$

Soit

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik}c_{jk} = \sum_{k=1}^n c_{ik}b_{jk} = P_\varphi(\varphi)$$

$$P_\varphi(X)\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}b_{jk} = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}(X)[a_{jk} - X\delta_{jk}]$$

$$P_\varphi(\varphi)\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n}[c_{ik}(\varphi)].[a_{jk}\Im - \varphi\delta_{jk}], \quad \varphi(v_k) = \sum a_{jk}u_j$$

$$[P_\varphi(\varphi)\delta_{ij}](v) = \sum_{k=1}^{n}[c_{ik}(\varphi)].[a_{jk}\Im - \varphi\delta_{jk}](v)$$

Or

$$\sum_{j=1}^{n}[a_{jk}\Im - \varphi\delta_{jk}]u_k = \sum_{j=1}^{n}[a_{jk}u_j - \varphi(u_k)] = 0$$

En substituant à v $u_1, \cdots, u_n$ on obtient

$$\begin{aligned}
[P_\varphi(\varphi)\delta_{ij}](u_1) &= \sum_{k=1}^{n}[c_{ik}(\varphi)].[a_{jk}\Im - \varphi\delta_{jk}](u_1)\\
[P_\varphi(\varphi)\delta_{ij}](u_2) &= \sum_{k=1}^{n}[c_{ik}(\varphi)].[a_{jk}\Im - \varphi\delta_{jk}](u_2)\\
&\vdots\\
[P_\varphi(\varphi)\delta_{ij}](u_n) &= \sum_{k=1}^{n}[c_{ik}(\varphi)].[a_{jk}\Im - \varphi\delta_{jk}](u_n)
\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{c} P_\varphi(\varphi)(u_1) = 0\\ P_\varphi(\varphi)(u_2) = 0\\ \vdots\\ P_\varphi(\varphi)(u_n) = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow P_\varphi(\varphi) = 0$$

■

Théorème 1.3.5 (Décomposition des noyaux) *E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$, $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et $P_1, \cdots, P_r \in \mathbb{K}[X]$ on suppose que les polynômes $P_1(X), \cdots, P_r(X)$ sont premiers entre eux, et soit l'endomorphisme composé $[P_1(\varphi)] \circ [P_2(\varphi)] \circ \cdots \circ [P_r(\varphi)] = P$. On considère le sous-espace de E stable par u.*

$$\mathcal{N} = \ker(P), \quad \mathcal{N}_i = \ker(P_i),\ 1 \leq i \leq r$$

Alors $\mathcal{N}$ est somme directe des $\mathcal{N}_i$

$$ie\ \ker\left([P_1(\varphi)] \circ [P_2(\varphi)] \circ \cdots \circ [P_r(\varphi)]\right) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(P_i(\varphi))$$

Preuve.

— Le cas $r = 1$ est triviale

— Cas $r = 2$, ici P est le produit de deux polynôme P_1 et P_2 premier entre eux. D'après le théorème de Bezout, il existe deux polynômes $Q_1(X)$ et $Q_2(X)$ tels que

$$Q_1(X)P_1(X) + Q_2(X)P_2(X) = 1$$

d'où

$$e = Q_1(u) \circ P_1(u) + Q_2(u) \circ P_2(u)$$

que nous écrivons simplement

$$e = Q_1 \circ P_1 + P_2 \circ Q_2 \qquad (\bigstar)$$

Nous utilisons alors la commutativité de l'algèbre $\mathbb{K}[u]$.

Montrons que $\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2 = \{0\}$, d'après $(\bigstar)$

$$\forall x \in E, \;\; x = Q_1(P_1(x)) + Q_2(P_2(x))$$

Or pour tout $x \in \mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2, \; P_1(x) = P_2(x) = 0$

Montrons que $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2$. D'après $(\bigstar)$, tout $x \in \mathcal{N}$ s'écrit

$$x = x_1 + x_2 \;\; \text{avec } x_i = Q_i(P_i(x_i)) \;\; 1 \leq i \leq 2$$

On a

$$P_2(x_1) = (P_2 \circ Q_1 \circ P_1)(x) = (Q_1 \circ P_1 \circ Q_2)(x)$$

$P_2(x_1)$ est l'image de par Q_1 de $(P_1 \circ P_2)(x) = 0$ puisque $P_1 \circ P_2$ est $P(u)$ et puisque $x \in \ker P(u)$

Ainsi $x_1 \in \mathcal{N}_2$ et, de même $x_2 \in \mathcal{N}_1$

Montrons que $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}$. Pour tout $x \in \mathcal{N}_1$ on a $P_1(x) = 0$, ce qui entraine $P_2(P_1(x)) = 0 \iff p(x) = 0$, (avec $p = P(u)$)

On montre de la même façon que $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{N}$; on en déduit que $\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2 \subset \mathcal{N}$.

Et par conséquent on a $\mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2 = \mathcal{N}$

— Cas $r \geq 3$. On suppose que le théorème est démontré à l'ordre $r-1$ et on considère le produit $P = P_1P_2 \cdots P_r$ de polynômes premiers entre eux deux à deux. On applique le résultat précédent aux deux polynômes P_1 et $Q = P_2P_3 \cdots P_r$, qui sont premiers entre eux ; on obtient ainsi

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \oplus \ker(Q)$$

Or d'après l'hypothèse de récurence $\ker(Q)$ est somme directe de $\mathcal{N}_i, \; 2 \leq i \leq r$. ce qui donne le résultat.

■

1.4 Sous-espaces caractéristiques (ou spectraux)

Soit φ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E de dimension finie n non nulle. Nous supposons que le polynôme caractéristique P_φ de φ est scindé dans $\mathbb{K}$. Nous avons ainsi

$$P_\varphi(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{r_i}, \qquad (*)$$

en désignant par $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de φ, par $r_1, \cdots, r_r$ leurs multiplicités

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme minimal Q_φ de φ divise P_φ, comme il admet chaque λ_i comme racine, et il est unitaire, il s'écrit :

$$Q_\varphi(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{q_i}, \quad 1 \leq q_i \leq r_i.$$

Posons $N_i = \ker(\varphi - \lambda_i I)^{q_i}$. Nous allons montrer que q_i est l'indice [[de l'endomorphisme]] $\varphi - \lambda_i I$

Ayant fixé $i (1 \leq i \leq r)$, on applique le théorème de la décomposition des noyaux avec

$$\xi_i (X - \lambda_i)^{l_i} \quad \text{et} \qquad \xi_j = (X - \lambda_j)^{q_j} \quad \text{pour } j \neq i$$

Nous obtenons $(\xi(X))$ ici $Q_\varphi(X)$:

$$E = N_i \oplus G_i \quad \text{avec} \;\; G_i = \bigoplus_{i \neq j} N_j \qquad (**)$$

En appliquant le même théorème avec cette fois

$$\xi_i = (X - \lambda_i)^{l_i}, \quad \text{et} \quad \xi_j = (X - \lambda_j)^{q_j} \quad \text{pour} \;\; j \neq i$$

Nous obtenons ($\xi(X)$ étant ici $(X - \lambda_i)^{l_i} \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)^{q_j}$) :

$$\ker \xi(\varphi) = \ker(u - \lambda_i I)^{l_i} \oplus G_i \qquad (***)$$

- Si $l_i \geq q_i$, (en particulier si $l_i = r_i$), le polynôime P qui intervient dans $(***)$ est un multiple du polynôme minimal Q_φ; le noyau de $\xi(\varphi)$ est E; compte tenude $\ker(\varphi - \lambda_i I)^{l_i} \supset N_i$, la comparaison de $(**)$ et $(***)$ fournit gràce à des considérations de dimensions $\ker(\varphi - \lambda_i I)^{l_i} = N_i$
- Si $l_i < q_i$, le polynôme ξ, dont le degré est strictement inférieur au degre de Q_φ ne peut être multiple de Q_φ; on a $\xi(\varphi) \neq 0$ et $\ker \xi(\varphi) \neq E$, ce qui exige l'inclusion stricte $\ker(\varphi - \lambda_i I)^{l_i} \subset N_i$
- Reprenons $E = \bigoplus_{i=1}^{r} N_i$ et soit φ_i l'endomorphisme induit par φ sur le sous-espace stable N_i

D'après le théorème précédent, le polynôme minimal de φ_i est $(X-\lambda_i)^{q_i}$, le polynome caractéristique de φ_i est donc $(X-\lambda_i)^{r_i}$ avec $r_i = \dim N_i$ on en déduit que le polynôme caractéristique de φ est

$$P_\varphi(X) = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{r_i} \qquad (****)$$

En comparant $(*)$ et $(****)$ on constate que : $\dim N_i = r_i$ $(1 \leq i \leq r)$. En conclusion :

Théorème 1.4.1 (Théorème et Définition) *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie non nulle n, et φ un endomorphisme de E qui admet un polynôme caractéristique de la forme :*

$$P_\varphi(X) = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{r_i}(\text{ les } \lambda_i \text{ deux à deux distintes, les } m_i \text{ non nuls})$$

Alors le polynôme minimal s'écrit

$$Q_\varphi(X) = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{q_i} \quad 1 \leq q_i \leq r_i$$

L'ordre de multiplicité q_i de la racine λ_i de Q_φ est l'indice de l'endomorphisme $\varphi - \lambda_i I$. Le sous-espace vectoriel de E :

$$N_i = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \ker(\varphi - \lambda_i I)^k,$$

qui est aussi bien le noyau de $(\varphi-\lambda_i I)^{q_i}$ que celui de $(\varphi-\lambda_i I)^{r_i}$, est dit sous-espace caractéristique (ou spectral) associé à la valeur propre λ_i, sa dimension est q_i

E est la somme directe des N_i, $1 \leq i \leq r$. L'endomorphisme φ_i induit par φ sur N_i admet $(X-\lambda_i)^{r_i}$ pour polynôme caractéristique et $(X-\lambda_i)^{q_i}$ pour polynôme minimal. L'endomorphisme $\psi_i = \varphi_i - \lambda_i Id_{N_i}$ est nilpotent d'indice q_i

Ce théorème permet de caractériser les endomorphismes diagonalisables

Proposition 1.4.2 *Un endomorphisme φ d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E de dimension finie non nulle n est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé dans $\mathbb{K}$ et n'admet que des zéros simples.*

Preuve. La condition est néccessaire : Par hypothèse, φ est diagonalisable. Son polynôme caractéristique et par suite son polynôme minimal sont scindés sur $\mathbb{K}$. On peut écrire

$$E = \bigoplus_i N_i \;\; \text{avec } N_i = \ker(\varphi - \lambda_i I)^{q_i}$$

D'autre part l'endomorphisme φ étant diagonalisable, E est somme directes des espaces propres, ce qui s'écrit

$$E = \bigoplus_i E_i \quad \text{avec} \quad E_i = \ker(\varphi - \lambda_i I)$$

Compte tenu des inclusions $E_i \subset N_i$, on a, grâce à des considérations de dimensions : pour tout i, $E_i = N_i$, ce qui d'après la définition de l'indice, exige $q_i = 1$, or q_i est l'ordre de multiplicité de λ_i du polynôme minimal.

La condition est suffisante : L'hypothèse est ici $Q_\varphi(X) = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)$, les λ_i étant des vecteurs propres deux à deux distinctes de φ, on en déduit que $E = \bigoplus_i \ker(\varphi - \lambda_i I)$, somme directes des sous-espaces propres ; φ est donc diagonalisable. ■

1.5 Endomorphismes nilpotents - Réduction de Jordan

E est un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{C}$.

Définition 1.5.1 *Un endomorphisme φ ($\varphi \in \mathcal{L}(E)$) est dit nilpotent si et seulemens si il existe $m \in \mathbb{N}$ / $\varphi^m = 0$*

L'indice de nilpotence de φ est le plus petit entier r tel que $\varphi^r = 0$ et $\varphi^{r-1} \neq 0$

Remarque 1.5.2 *Si φ est nilpotent d'indice m, alors*

— *Le polynôme caractéristique de φ $P_\varphi(X) = (-X)^m$*

— *Le polynôme minimal de φ $Q_\varphi(X) = (X)^\mu$, $1 \leq \mu \leq m$*

Inversement si $P_\varphi(X)$ a tous ses zéros nuls ie $P_\varphi(X) = (-X)^n$, comme $P_\varphi(\varphi) = 0$, alors $(-1)^n\varphi^n = 0$ donc φ est nilpotent

$Q_\varphi(X)$ divise $P_\varphi(X) \Longrightarrow Q_\varphi(X) = X^\mu$, $1 \leq \mu \leq n$, comme $Q_\varphi(\varphi) = 0$ alors indice de nilpotence = degré de $Q_\varphi(X)$

φ est nilpotent alors $M(\varphi)$ est nilpotente de même indice.

Réduction des endomorphismes nilpotents

Lemme 1.5.3 *Soit E un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension n, φ un endomorphisme nilpotent de E. Alors il existe une base B de E telle que l'on ait :*

$$M_B(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_1 & & & & 0 \\ & 0 & \varepsilon_2 & & & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & \varepsilon_{n-1} \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix}, \ \textit{avec } \varepsilon_i = \begin{cases} 0 \\ \textit{ou} \ \ \forall i \quad (\bigstar) \\ 1 \end{cases}$$

Définition 1.5.4 *Une matrice élémentaire de Jordan est une matrice de la forme (★)*

Preve du lemme. $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent, $P_\varphi(X)$ son polynôme caractéristique et $Q_\varphi(X)$ son polynôme minimal, $P_\varphi(X) = (-X)^n, \ \ Q_\varphi(X) = X^\mu, \ \ 1 \leq \mu \leq n$

1. Cas $\mu = n$
   $Q_\varphi(\varphi) = \varphi^\mu = 0$; $\varphi^{\mu-1} \neq 0 \Longrightarrow \exists v \in E$ tel que $\varphi^{\mu-1}(v) \neq 0$
   On utilise une récurence décroissante et on détermine une suite de vecteurs que l'on montre que c'est une base de E

$$\begin{array}{rcl}
v_n & = & \varphi^0(v) = v \\
v_{n-1} & = & \varphi(v_n) = \varphi(v) \\
v_{n-2} & = & \varphi(v_{n-1}) = \varphi(\varphi(v_n) = \varphi^2(v_n) \\
& & \vdots \\
& & \vdots \\
v_2 & = & \varphi(v_3) = \varphi^{n-2}(v_n) = \varphi^{n-2}(v) \\
v_1 & = & \varphi(v_2) = \varphi^{n-1}(v_n) = \varphi^{n-1}(\varphi v)
\end{array}$$

   $0 \notin \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. De plus $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ est une base de E
   En effet si

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j = 0 \text{ alors } \forall k \in \mathbb{N} \quad \sum_{j=1}^{n} \beta_j \varphi^k(v_j) = 0 \quad \beta_j \in \mathbb{C}$$

$$\begin{array}{rl}
\Longrightarrow & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \beta_j \varphi^k\left(\varphi^{n-j}(v)\right) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \varphi^{n+k-j}(v) = \sum_{j=k+1}^{n} \beta_j \varphi^{n+k-j}(v) \\
= & \displaystyle\sum_{j=k+1}^{n} \beta_j \varphi(v_{j-k+1}) = \sum_{j=k+1}^{n} \beta_j v_{j-k}
\end{array}$$

   $k = n-1, \ j = n,$

$$\sum_{j=k+1}^{n} \beta_j v_{j-k} = \beta_n v_1 = 0 \Longrightarrow \beta_n = 0$$

   $k = n-2, \ j = n-1, n$

$$\sum_{j=k+1}^{n} \beta_j v_{j-k} = \beta_n v_2 + \beta_{n-1} v_1 = 0 \Longrightarrow \beta_{n-1} = 0 \text{ car } \beta_n = 0$$

$$\vdots$$

$k=1,\ j=2,\cdots,n$

$$\sum_{j=k+1}^{n}\beta_j v_{j-k}=\beta_2 v_1+\beta_3 v_2+\cdots+\beta_n v_{n-1}=0 \Longrightarrow \beta_2 v_1=0 \Longrightarrow \beta_2=0$$

$\Longrightarrow \beta_1=0$

La matrice de φ sur la base $\{v_1,\cdots,v_n\}$ est

$$\begin{array}{c} \varphi(v_1)\quad \ldots\quad .\quad \varphi(v_n) \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & 0 \\ & 0 & . & & & \\ & & . & 1 & & \\ & & & . & . & \\ & & & & . & 1 \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ . \\ v_n \end{bmatrix} \end{array}$$

2. Cas général $\mu \neq n$

Il s'agit de trouver une expression de E sous forme d'une somme directe des sous espaces invariants par φ, de plus $d^\circ Q_{\varphi k}(X)=\dim E_k$ ($P_\varphi(X)=(-X)^n$, $Q_\varphi(X)=X^\mu$)

Le noyau des endomorphismes $\{\varphi^0=\Im,\varphi,\varphi^2,\cdots,\varphi^{\mu-1},\varphi^\mu\}$ forme une suite strictement croissante des sous-espace de E

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0=\ker\varphi^0 & \subsetneqq & \ker\varphi & \subsetneqq & \cdots & \subsetneqq & \ker\varphi^{\mu-2} & \subsetneqq & \ker\varphi^{\mu-1}\subsetneqq E & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \cdots & & \downarrow & & \downarrow & & \text{acev } F_k=\ker\varphi^k \\ F_0 & \subsetneqq & F_1 & \subsetneqq & \cdots & \subsetneqq & F_{\mu-2} & \subsetneqq & F_{\mu-1}\nsubseteq F_\mu=E & & \end{array}$$

On sait que $\varphi^{\mu-1}\neq 0 \Longrightarrow F_{\mu-1}\subsetneqq F_\mu$. Soit G_μ un suplémentaire quelconque de $F_{\mu-1}$ dans $F_\mu \Longrightarrow F_\mu=G_\mu\oplus F_{\mu-1}$

$$\Longrightarrow x\in G_\mu \text{ alors } \left\{\begin{array}{l} \varphi(x)\in F_{\mu-1} \text{ puisque } \varphi^{(\mu-1)}(\varphi(x))=\varphi^\mu(x)=0 \ \ (1) \\ \varphi(x)\notin F_{\mu-2} \text{ puisque } \varphi^{(\mu-2)}(\varphi(x))=\varphi^{\mu-1}(x)\neq 0 \ \ (2) \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} (1)\Longrightarrow \varphi(G_\mu)\subset F_{\mu-1} \\ (2)\Longrightarrow \varphi(G_\mu)\cap F_{\mu-2}=\{0\} \end{array}\right\}\Longrightarrow F_{\mu-2}\subsetneqq F_{\mu-1}$$

Soit $G_{\mu-1}$ un supplémentaire quelconque de $F_{\mu-2}$ dans $F_{\mu-1}$, de manière analogue on a

$$\left.\begin{array}{r} (1)\Longrightarrow \varphi(G_{\mu-1})\subset F_{\mu-2} \\ (2)\Longrightarrow \varphi(G_{\mu-1})\cap F_{\mu-3}=\{0\} \end{array}\right\}\Longrightarrow F_{\mu-3}\subsetneqq F_{\mu-2}$$

Par conséquent

Soit $G_{\mu-k}$ un supplémentaire quelconque de $F_{\mu-k+1}$ dans $F_{\mu-k}$, de manière analogue on a

$$\left.\begin{array}{r} (1)\Longrightarrow \varphi(G_{\mu-k})\subset F_{\mu-k+1} \\ (2)\Longrightarrow \varphi(G_{\mu-k})\cap F_{\mu-k+1}=\{0\} \end{array}\right\}\Longrightarrow F_{\mu-k}\subsetneqq F_{\mu-k+1}$$

G_1 suplémentaire de F_0 dans F_1, alors $E = G_1 \oplus G_2 + \cdots \oplus G_\mu$
Soit $\{v_{\mu_1}, v_{\mu_2}, \cdots, v_{\mu_n}\}$ une base de G_μ, alors $\{\varphi(v_{\mu_1}), \varphi(v_{\mu_2}), \cdots, \varphi(v_{\mu_n})\}$ est libre dans $G_{\mu-1}$ qui se compléte en une base de $\{\varphi(v_{\mu_1}), \varphi(v_{\mu_2})$
$, \cdots, \varphi(v_{\mu_n}), v_{\mu-1,n\mu+1}, \cdots, v_{\mu-1,n_\mu+1}\} = B$. L'image de B

$$\left\{\varphi^2(v_{\mu_1}), \varphi^2(v_{\mu_2}), \cdots, \varphi^2(v_{\mu_n}), \varphi(v_{\mu-1,n\mu+1}), \cdots, \varphi(v_{\mu-1,n_\mu+1})\right\}$$

est une base de E ■

Théorème 1.5.5 (de Jordan) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r\}$ le spectre de A. Alors A est semblable à une matrice de la forme*

$$\begin{pmatrix} T_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T_r \end{pmatrix}$$

où chaque bloc diagonale T_i est de la forme

$$T_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon & \\ & \ddots & \varepsilon \\ & & \lambda_i \end{pmatrix}, \varepsilon = 0 \text{ ou } 1$$

c'est-à-dire $T_i - \lambda_i \Im$ est une matrice élémentaire de Jordan.

Preuve. Soit φ l'endomorphisme canoniquement associé à A et notons φ_i la restriction de φ au sous espace carastéristique C_{λ_i} (qui est stable) on a : $(\varphi_i - \lambda_i Id_{C_{\lambda i}})^{m_i} = 0 \in \mathcal{L}(C_{\lambda_i})$. Donc $\varphi_i - \lambda_i Id_{C_{\lambda i}}$ est nilpotent et il existe une base $\mathcal{B}_i$ de C_{λ_i} où cet endomorphisme se traduit par une matrice élémentaire de Jordan. La matrice $\varphi_i - \lambda_i Id$ étant scalaire, il vient que

$$M_{\mathcal{B}_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon & & 0 \\ & \cdot & \ddots & \\ & & \cdot & \varepsilon \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}; \quad \varepsilon = 0 \text{ ou } 1$$

Comme $\bigoplus_{i=1}^{r} C_{\lambda_i} = C^n$, la famille $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \cdots, \mathcal{B}_r\}$ est une base de C^n et $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ a la forme voulue. ■

Exemple 1.5.6 *On dit qu'un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$ est nilpotent d'indice p, s'il existe $p > 1$ tel que $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$. On dira de même qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente d'indice p s'il existe $p > 1$ tel que $A^{p-1} \neq 0$ et $A^p = 0$.*

1. *a) Montrer que si f est nilpotent et s'il existe $\theta \in \mathbb{K}$ et $x \neq 0$ de E tel que $f(x) = \theta x$ alors $\theta = 0$*

   b) f étant nilpotent d'indice p, démontrer que si x est tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$, les vecteurs
$$x = f^0(x),\ f^1(x), \cdots, f^{p-1}(x)$$
   sont linéairement indépendants

   c) En déduire que f est nilpotent d'indice n, si et seulement si il existe une base (a_i) de E telle que pour la matrice
$$A = M(f, (a_i)) = \alpha_{ij}$$
   tous les α_{ij} sont nuls sauf $\alpha_{i,i+1} = 1$ $(1 \leq i \leq n-1)$.

2. *A étant une matrice nilpotente d'indice p de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Démontrer que $I_n - A$ est inversible et calculer son inverse.*

3. *Application : On considère la matrice :*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   Montrer que $N = A - I_4$ est nilpotente. En déduire A^k pour $k \in \mathbb{K}$ (remarquer que I_4 et N commutent).

Solution :

1) a) Supposons qu'il $\exists \theta \in \mathbb{K}$ / $f(x) = \theta x,\ x \neq 0$

f étant linéaire alors $f(f(x)) = f(\theta x) = \theta f(x)$

f étant nilpotente d'indice p
$$\Longrightarrow f^p(x) = 0 \ \ or \ \ f^p(x) = f^{p-1}(f(x)) = f^{p-1}(\theta x) = \theta f^{p-1}(x) = 0 \quad (*)$$
comme $f^{p-1}(x) \neq 0$ il en découle que $\theta = 0$

b) Soit x / $f^{p-1}(x) \neq 0$. Supposons qu'il existe $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{K}$ /
$$\lambda_0 f^0(x) + \lambda_1 f^1(x) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x) = 0$$
On a alors
$$f[\lambda_0 f^0(x) + \lambda_1 f^1(x) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x)] = f(0) = 0$$
$$\lambda_0 f^1(x) + \lambda_1 f^2(x) + \cdots + \lambda_{p-1} f^p(x) = 0$$
$f^p(x) = 0$, l'égalité précédente devient
$$\lambda_0 f^1(x) + \lambda_1 f^2(x) + \cdots + \lambda_{p-2} f^{p-1}(x) = 0$$

Puis on réitère l'opération $p-1$ fois et on obtient $\lambda_0 f^{p-1}(x)+\lambda_1 f^p(x)=0 \Longrightarrow \lambda_0 f^{p-1}(x)=0$, ce qui d'après a) implique que $\lambda_0=0$, puis on revient à l'ordre $p-1$ et onobtient $\lambda_1 f^{p-1}(x)+\lambda_2 f^p(x)=0 \Longrightarrow \lambda_1=0$. De proche en proche on obtient $\lambda_{p-2} f^{p-1}(x)+\lambda_{p-1} f^p(x)=0 \Longrightarrow \lambda_{p-2}=0$ et donc finalement (*) implique $\lambda_{p-1}=0$ d'où

$$\{f^0(x), f^1(x)+\cdots, f^{p-1}(x)\}$$

est libre.

c) Si $f \in \mathcal{L}_n(E,\mathbb{K})$ est nilpotent d'indice n, on vu que

$$\{f^0(x), f^1(x)+\cdots, f^{n-1}(x)\}$$

est un système libre, donc constitue une base de E

Soit M la matrice de f dans la base
$\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}=\{f^{n-1}(x), f^{n-2}(x)+\cdots, f^0(x)\}$, alors on a
$f(u_1)=f^n(x)=0$,
$f(u_2)=f(f(^{n-2}(x))=f^{n-1}(x)=u_1$,
$\vdots$
$f(u_n)=f(f^0(x))=f^1(x)=u_{n-1}$
on alors

$$M(f)_{\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Réciproquement si f admet M comme matrice par rapport à une base, alors on vérifie que f est nilpotent d'indice n car M l'est.

2) M étant nilpotente d'indice p; $\Longrightarrow M^p=0$

$$I-M^p=I^p-M^p=(I-M)\sum_{k=0}^{p-1} I^k M^{p-k}=(I-M)\sum_{k=0}^{p-1} M^{p-k}=I$$

Par conséquent $I-M$ est inversible et on a :

$$(I-M)^{-1}=\sum_{k=0}^{p-1} M^{p-k}$$

3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=I_4+N$

$$N^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad N^4=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

N est nilpotente d'indice 4.

$$A^k = (I_4 + N)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j N^j I_4^{k-j} = C_k^0 I_4 + C_k^1 N + C_k^2 N^2 + C_k^3 N^3$$

car I_4 et N commutent (on applique la formule de binôme) et pour $j > 3$, $N^j = 0$

$$\begin{aligned} A^k &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{k(k-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{k(k-1)(k-2)}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & k & \frac{k(k-1)}{2} & \frac{k(k-1)(k-2)}{6} \\ 0 & 1 & k & \frac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$