2011-2012
Dr. A.SY

UNIVERSITÉ DE THIES
UFR-SET
Licence II de Mathématiques & Informatique
T.D. Optimisation: Série III

Exercice 1 *Soit*

$$f(x,y) = exp(-x^2 - y^2 - 2x + y), \quad s/c: \; x^2 + y^2 = 2$$

1- Determiner les extema de f directement en utilisant le Lagrangien.
2- La contrainte $x^2+y^2=2$ correspond à l'équation d'un cercle. En paramétrant cette équation par $x=\sqrt{2}\cos(t)$ et $y=\sqrt{2}\sin(t)$; on raméne au problème de recherche, d'extremum d'une fonction d'une seule variable. Retrouver les résultats du 1-.

Exercice 2 *Etudier la nature des extréma de la fonction $f(x,y)$ sous la contrainte $g(x,y)=0$*

$$f(x,y) = \sqrt{x+1}e^{-y} + \sqrt{y+1}e^{-x}, \quad g(x,y) = \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} - 4$$

Problème 1 *1. Résoudre le problème*

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i \log(x_i)\right] \quad s/c \left\{ \begin{array}{ll} x_i \geq 0 & i=1,...,n \\ \sum_{i=1}^n x_i \leq 1 & \end{array} \right.$$

(on supposera que $x\log(x)=0$ si $x=0$)
2. Application: Résoudre le problème

$$\left\{ \begin{array}{c} \inf[x_1\log(x_1) + x_2\log(x_2) + x_3\log(x_3)] \\ s/c \left\{ \begin{array}{c} x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Problème 2 *Soit*

$$f(x) = ||x - a||^2$$

1. Calculer les dérivées première et seconde au sens de Gateaux de f.
On considère le problème d'optimisation suivant:

$$\min_{x \in \mathcal{C}} -\log\left(1 - ||x||^2\right) + \langle a, x \rangle$$

avec

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ ||x|| \leq \frac{1}{2}, \ \langle a, x \rangle \leq 0\}$$

où $||.||$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$ et $\langle ., . \rangle$, le produit scalaire associé.
2. Montrer que l'on a un problème d'optimisation convexe ($\mathcal{C}$ convexe).
3. Calculer les solutions optimales suivant les valeurs de a.