2011-2012
A.SY

UNIVERSITÉ ALIOUNE DIOP DE BAMBEY
UFR-SATIC. L. II MPCI-SID
Semestre 4-Mathématiques: Equations et Systémes. Examen de la session 1

Exercice 1 *1. Résoudre l'équation aux différences finies suivantes:*

$$u_n - 4u_{n-1} + 4u_{n-2} = 2^n n^2 + n + 1$$

2. Discuter suivants les parametres des solutions des équations aux différences suivantes: (on supposera que $a \geq 0$ et $b > 0$)

$$u_{n+2} - bu_{n+1} - a^2 u_n = \frac{1}{2^n}$$

Exercice 2 *1. Résoudre les équations différentielles suivantes.*
a. $xy' - y(\ln y - \ln x) = 0$
b. $y' = (1 + \sin(t))y(y + 1)$
2. On considère l'équation différentielle

$$(1 + x^2)y'' + xy' - \frac{1}{4}y = 0 \tag{1}$$

où y désigne une fonction inconnue de la varible x.
En faisant le changement de variable $x = sh(t)$. (*)[1]
Intégrer la nouvelle équation différentielle ainsi obtenue et en déduire les solutions de (1).

Problème 1 *Soient $a > 0$, $l > 0$. On considère le systéme suivant:*

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} - \Delta f(x,t) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \\ f(x, 0) = f_0(x), \quad f_0 \text{ donnèe} \\ f(0, t) = f(l, t) = 0 \end{cases}$$

On suppose que $f(x, t)$ s'écrit comme produit de deux fonctions $u(x)$ et de $v(t)$ ($f(x, t) = u(x)v(t)$).
1. Montrer que

$$u(x)v'(t) = a^2 u''(x)v(t)$$

c'est-à-dire

$$\frac{x(x)}{u''(x)} = \frac{a^2 v(t)}{v'(t)}$$

[1] On reppelle que: $sh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, $ch(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$
et que $ch^2(t) - sh^2(t) = 1$, $\frac{dch(t)}{dt} = sh(t)$, $\frac{dsh(t)}{dt} = ch(t)$

2. *En d́eduire qu'il existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\begin{cases} v'(t) + a^2\lambda v(t) = 0 \\ u''(x) + \lambda u(x) = 0 \end{cases}$$

3. *a- Résoudre le système.*

b- En utilisant les conditions initiales $f(0,t) = f(l,t) = 0$ *montrer que* $\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l}$, $n \in \mathbb{N}$.

c- En déduire qu'il existe une famille de solutions élémentaires

$$f_n(x,t) = \sin(\frac{n\pi}{l})x \exp(-\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2})t$$

4. *On cherche maintenant* $f(x,t)$ *sous la forme d'une série convergente*

$$f(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \sin(\frac{n\pi}{l})x \exp(-\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2})t$$

a- Calculer $f(0,x)$

b- En introduisant les fonctions $\widehat{f_0} : R \longrightarrow R$ *impaires,* $2\pi-$*périodiques, et dont la restriction à* $[0,\pi]$ *est définie par*

$$\widehat{f_0}(\theta) = f_0(\frac{l}{\pi}\theta)$$

et donc la suite (α_n) *est la suite des coéfficients de Fourier de* $\widehat{f_0}$.

Déduire la valeur de α_n.

BONNE CHANCE

Solution 1 *1.*

$$u_n - 4u_{n-1} + 4u_{n-2} = 2^n n^2 + n + 1$$

L'équation homogène est $u_n - 4u_{n-1} + 4u_{n-2} = 0$ *et l'équation caractéristique:* $r^2 - 4r + 4 = 0$ *qui admet une racine double* $r_1 = r_2 = 2$.

$$u_{n_H} = (An + B)2^n$$

La solution particulière corresponsante à $g_1(n) = 2^n n^2$ *s'écrit sous la forme* $2^n n^2 Q_2(n)$ *où est un polynôme de degré 2 en n (on remplace dans l'équation et on trouve les coefficients de* $Q_2(n)$*). La solution particulière corresponsante à* $g_2(n) = n+1$ *s'écrit sous la forme* $an+b$ *(on remplace dans l'équation et on trouve les coefficients a et b) d'où*

$$u_n = (An + B)2^n + 2^n n^2 Q_2(n) + an + b$$

2.

$$u_{n+2} - bu_{n+1} - a^2 u_n = \frac{1}{2^n}$$

L'équation homogène est $u_{n+2} - bu_{n+1} - a^2 u_n = 0$ *et l'équation caractéristique:* $r^2 - br - a^2 = 0 \Rightarrow \Delta_{ab} = b^2 + 4a^2 > 0$ *donc l'équation admet deux racines simples* $r_1 = \frac{b+\sqrt{b+4a^2}}{2}$ *et* $r_2 = \frac{b-\sqrt{b+4a^2}}{2}$.

$$u_{n_H} = A\left(\frac{b+\sqrt{b+4a^2}}{2}\right)^n + B\left(\frac{b-\sqrt{b+4a^2}}{2}\right)^n$$

<u>Cas 1:</u> $r_1 \neq 1/2$ *et* $r_2 \neq 1/2$ *la solution particulière s'écrit sous la forme* $u_{n_p} = \alpha\frac{1}{2^n}$, *en remplaçant dans l'équation complète, on trouve* $\alpha = \frac{4}{1-2b-4a^2}$ *et la solution générale est:*

$$u_n = A\left(\frac{b+\sqrt{b+4a^2}}{2}\right)^n + B\left(\frac{b-\sqrt{b+4a^2}}{2}\right)^n + \frac{4}{1-2b-4a^2}.\frac{1}{2^n}$$

<u>Cas 2:</u> $r_1 = 1/2$ *ou* $r_2 = 1/2$ *la solution particulière s'écrit sous la forme* $u_{n_p} = \alpha n\frac{1}{2^n}$, *en remplaçant dans l'équation complète, on trouve dans tous les deux cas* $\alpha = (1-b)$ *et la solution générale est:*

$$u_n = A\left(\frac{b+\sqrt{b+4a^2}}{2}\right)^n + B\left(\frac{b-\sqrt{b+4a^2}}{2}\right)^n + \frac{(1-b)n}{2^n}.$$

<u>Remaerque:</u> Dans le cas 2, $r_1 = 1/2$ *ou* $r_2 = 1/2$, *on trouve* $b = \frac{1-4a^2}{2}$

Solution 2 *1. a.* $xy' - y(\ln y - \ln x) = 0$

$$xy' - y(\ln y - \ln x) = 0 \Longleftrightarrow xy' = y\ln\frac{y}{x} \Longleftrightarrow y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$$

Posons $z = \frac{y}{x} \Longrightarrow y' = z'x + z$ *et l'équation devient:*

$$z'x + z = z\ln z \Longleftrightarrow z'x = z(\ln z - 1) \Longleftrightarrow \frac{dz}{z(\ln z - 1)} = \frac{dx}{x}$$

or $\frac{dz}{z(\ln z-1)} = \frac{d(\ln z-1)}{\ln z-1}$ *et l'équation devient*

$$\frac{d(\ln z - 1)}{\ln z - 1} = \frac{dx}{x} \Longleftrightarrow \ln(\ln z - 1) = \ln x + k \Longrightarrow \ln z - 1 = Kx$$

$$\ln z = \ln\frac{y}{x} \Longrightarrow \ln y = \ln x + Kx + 1 \Longrightarrow y = e^{(\ln x + Kx + 1)} = exe^{Kx}$$

1. b. $y' = (1 + \sin(t))y(y + 1)$

$$y' = (1 + \sin(t))y(y + 1) \Longrightarrow \frac{y'}{y(y+1)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} = \sin(t) + 1$$

$$\Longrightarrow \int \frac{dy}{y} - \int \frac{dy}{y+1} = \int (\sin(t) + 1)dt \Leftrightarrow \log\frac{y}{y+1} = t - \cos t + K$$

$$\frac{y}{y+1} = 1 - \frac{1}{y+1} = Ae^{(t-\cos t)} \Longrightarrow y = \frac{1}{1 - Ae^{(t-\cos t)}} - 1$$

2.

$$x = sh(t) \Longrightarrow dx = ch(t)dt \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{ch(t)}$$

On reppelle que $ch^2(t) - sh^2(t) = 1$,

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{ch(t)}, \quad \left(\dot{y}(t) = \frac{dy}{dt}\right)$$

$$y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{y}(t)}{ch(t)}\right)$$

$$= -\frac{sh(t)}{ch^3(t)}\dot{y}(t) + \frac{\ddot{y}(t)}{ch^2(t)}, \quad \left(\ddot{y}(t) = \frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

$$\begin{aligned}(1 + x^2)y'' + y' + y &= (1 + sh^2(t)\left[-\frac{sh(t)}{ch^3(t)}\dot{y}(t) + \frac{\ddot{y}(t)}{ch^2(t)}\right] + \frac{sh(t)}{ch(t)}\dot{y}(t) - \frac{1}{4}y(t) \\ &= \frac{1 + sh^2(t)}{ch^2(t)}\ddot{y}(t) + \left[-\frac{(1 + sh^2(t))sh(t)}{ch^3(t)} + \frac{sh(t)}{ch(t)}\right]\dot{y}(t) - \frac{1}{4}y(t) \\ &= \ddot{y}(t) - \frac{1}{4}y(t) = 0\end{aligned}$$

On en déduit que

$$y(t) = Ae^{\frac{t}{2}} + Be^{-\frac{t}{2}}$$

$$t = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \Longrightarrow y(x) = A[x + \sqrt{x^2 + 1}]^{1/2} + B[x + \sqrt{x^2 + 1}]^{-1/2}$$

Solution 3

$$(*) \quad \frac{\partial f}{\partial t} - a^2\Delta f = 0; \quad \text{avec } a > 0,\ 0 \le x \le l,\ l > 0$$

Soit

$$f(t,x) = u(x)v(t)$$

en dérivant et remplaçant dans l'équation (*), on obtient

$$u(x)v'(t) = a^2 u''(x)v(t)$$

C'est-à-dire

$$\frac{v'(x)}{a^2 v(t)} = \frac{u''(x)}{u(t)}$$

On voit que ceci n'est possible que si ces rapports sont constants. D'où le système

$$\begin{cases} v'(t) + a^2\lambda v(t) = 0 \\ u''(x) + \lambda u(x) = 0 \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Si $\lambda > 0$, *on obtient*

$$\begin{cases} v(t) = Ae^{-a^2 t} \\ u(x) = Be^{\sqrt{-\lambda}x} + Ce^{-\sqrt{-\lambda}x} \end{cases}$$

Dans le prmier cas, les conditions initiales donnent

$$B = 0 \qquad \text{et} \quad C\sin\sqrt{\lambda}l = 0 \Longrightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Dans le second cas, on obtient

$$B + C = 0, \quad Be^{\sqrt{-\lambda}l} + Ce^{-\sqrt{\lambda}l} = 0$$

C'est-à-dire $B = C = 0$, *ce qui est sans intérêt.*

On obtient donc les solutions élémentaires

$$f_n(t,x) = \sin\frac{n\pi}{l}x\exp(-\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}t)$$

On cherche des solutions sous forme de séries convergentes

$$f(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\sin\frac{n\pi}{l}x\exp(-\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}t)$$

La condition initiales s'écrit

$$f(0,x) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

En introduisant les fonctions $\widehat{f_0} : R \longrightarrow R$ *impaires,* $2\pi-$*périodiques, et dont la restriction à* $[0,\pi]$ *est définie par*

$$\widehat{f_0}(\theta) = f_0(\frac{l}{\pi}\theta)$$

et donc la suite (α_n) *est la suite des coéfficients de Fourier de* $\widehat{f_0}$. *On a donc*

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi}\int_0^l f_0(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi d\xi.$$