

REPUBLIQUE DU SÉNÉGAL

Ministère de l'enseignement supérieur
et de la recherche

Université Alioune Diop de Bambey

ALGÈBRE LINÉAIRE III

Partie I Dterminants.

Dr **ALASSANE SY**

CHARGÉ D'ENSEIGNEMENTS

Année Académique 2012-2013

Table des matières

1	Réduction des endomorphismes	3
1.1	Valeurs propres, Vecteurs propres et Polynômes caractéristiques	3
1.2	Sous espaces propres	5
1.2.1	Diagonalisation	7
1.2.2	Exemples et Applications	9
1.2.3	Trigonalisation	13
1.3	Polynôme d'endomorphisme - Théorème de Cayley-Hamilton	15
1.4	Sous-espaces caractéristiques (ou spectraux)	19
1.5	Endomorphismes nilpotents - Réduction de Jordan	21

Chapitre 1

Réduction des endomorphismes

E est un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps $\mathbb{K}(= \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$,

$\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ est une base de E

$\mathcal{L}(E) = \text{Hom}(E, E)$ ensemble des applications linéaires de E vers E (ou endomorphismes)

$\mathcal{L}(E)$ muni des opérations suivantes :

$$\begin{array}{ll} \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) & \rightarrow \mathcal{L}(E) & \mathbb{K} \times \mathcal{L}(E) & \rightarrow \mathcal{L}(E) \\ (f, g) & \rightarrow f + g & (\lambda, f) & \rightarrow \lambda f \end{array}$$

est un espace vectoriel sur \mathbb{K} .

$\mathcal{L}(E)$ muni des opérations suivantes :

$$\begin{array}{ll} \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) & \rightarrow \mathcal{L}(E) & \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) & \rightarrow \mathcal{L}(E) \\ (f, g) & \rightarrow f + g & (f, g) & \rightarrow f \circ g \end{array}$$

est un anneau unitaire non commutatif

On identifie $\mathcal{L}(E) \simeq \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ensemble des matrices carrées d'ordre n

$M(f + g) = M(f) + M(g)$, $M(f \circ g) = M(f)M(g)$

$\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont des \mathbb{K} - algèbres, $J = Id_E$ $I_n = I$

1.1 Valeurs propres, Vecteurs propres et Polynômes caractéristiques

Définition 1.1.1 *a) $v \in E$ est un vecteur propre de $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ si et seulement si*

- (i) $v \neq 0$

- (ii) $\exists \lambda \in \mathbb{K} / \varphi(v) = \lambda v$

b) $\lambda \in \mathbb{K} / \varphi(v) = \lambda v$ est dite valeur propre associée à v

Remarque 1.1.2 λ est la valeur propre associée à $v \iff \varphi(v) = \lambda v \iff v \in \ker(\varphi - \lambda I)$
c'est-à-dire que $\det(\varphi - \lambda I) = 0$

Soit $M(\varphi) = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} = A$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (-1)^n \lambda^n + \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda^{n-k}$$

$$\alpha_1 = (-1)^{n-1} [a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}] = \text{Tr}(A) \quad \text{appelé trace de } A$$

$\det(A - \lambda I)$ est un polynôme de degré n noté $P_A(\lambda)$

Définition 1.1.3 *Le polynôme $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ est dit polynôme caractéristique de A*

Théorème 1.1.4 *Le polynôme caractéristique est un invariant de $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ ie indépendant de la base choisie.*

Preuve. Soit $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ une seconde base de E et B la matrice de passage de \mathcal{U} à \mathcal{V} ie $B = [v_1, v_2, \dots, v_n]$. Alors $A^* = B^{-1}AB$ est la matrice de φ dans B

$$\begin{aligned} \det(A^* - \lambda I) &= \det(B^{-1}AB - B^{-1}\lambda IB) = \det[B^{-1}(A - \lambda I)B] \\ P_{A^*}(\lambda) &= \det B^{-1} \det(A - \lambda I) \det B = \det(A - \lambda I) = P_A(\varphi) \end{aligned}$$

■

Remarque 1.1.5 *Le polynôme caractéristique ne dépend que de φ , on le note $P_\varphi(\lambda)$.*

Les valeurs propres de φ sont constituées des zéros de $P_\varphi(X)$ ie λ est valeur propre de φ si et seulement si $P_\varphi(\lambda) = 0$

Les coefficients de $P_\varphi(X)$ sont des invariants de φ en particulier $\alpha_1 = \text{Tr}(\varphi)$ et $\alpha_n = \det(\varphi)$

Définition 1.1.6 *L'ensemble des valeurs propres de A dans \mathbb{K} est appelé spectre de A et est noté $\text{spec}_{\mathbb{K}}(A)$. Il dépend du corps \mathbb{K} considéré.*

Exemple 1.1.7 Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

Déterminer $\text{spec}_{\mathbb{Q}}(A)$, $\text{spec}_{\mathbb{R}}(A)$, $\text{spec}_{\mathbb{C}}(A)$

$$P_A(X) = \det(A - XI) = \begin{vmatrix} -X & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -X & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -X & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -X \end{vmatrix} = X^4 - X^2 - 2 = (X^2 - 2)(X^2 + 1)$$

et donc $\text{spec}_{\mathbb{Q}}(A) = \emptyset$, $\text{spec}_{\mathbb{R}}(A) = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$, $\text{spec}_{\mathbb{C}}(A) = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, i, -i\}$

Théorème 1.1.8 Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors chaque polynôme de degré non nul, possède au moins une racine

Preuve. En effet, \mathbb{C} est algébriquement clos, en vertu du théorème de D'alambert, chaque polynôme admet au moins une racine. ■

1.2 Sous espaces propres

Définition 1.2.1 On appelle sous espace propre associé à une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$, le noyau de $(\varphi - \lambda I)$, ie $\ker(\varphi - \lambda I)$ noté E_λ . E_λ contient 0 et le vecteur propre associé à λ , par suite $\dim E_\lambda \geq 1$

Théorème 1.2.2 Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, m valeurs propres distinctes de $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Alors la somme des sous espaces $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \dots + E_{\lambda_m}$ est directe ie $E_{\lambda_i} \cap E_{\lambda_j} = \{0\}$ pour tout $i \neq j$.

Preuve. Elle se fait par récurrence sur m . Montrons cette proposition pour $m = 2$. Il suffit de montrer que $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$. Soit V un élément de $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2}$. On a alors

$$u(V) = \lambda_1 V = \lambda_2 V \implies (\lambda_1 - \lambda_2)V = 0 \implies V = 0$$

car λ_1 et λ_2 sont distinctes

Supposons que la propriété est vraie à l'ordre $m - 1$, montrons la à l'ordre m .

Il suffit de montrer que 0 se décompose de manière unique en somme d'éléments de E_{λ_i} autrement dit que

$$\forall i, V_i \in E_{\lambda_i} \text{ et } 0 = V_1 + V_2 + \dots + V_m \implies \text{pour tout } i, V_i = 0$$

En effet on applique u . On obtient

$$0 = u(V_1) + u(V_2) + \dots + u(V_m) \implies \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots + \lambda_m V_m = 0 \quad (*)$$

On a en multipliant par ailleurs par λ_m

$$0 = V_1 + V_2 + \dots + V_m \implies \lambda_m V_1 + \lambda_m V_2 + \dots + \lambda_m V_m = 0 \quad (**)$$

En retranchant $(*)$ de $(**)$ on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda_1 - \lambda_m)V_1 + (\lambda_2 - \lambda_m)V_2 + \dots + (\lambda_{m-1} - \lambda_m)V_{m-1} \\ &\implies \forall i \in \{1, 2, \dots, m-1\} (\lambda_m - \lambda_i)V_i = 0 \end{aligned}$$

car par hypothèse, les $m - 1$ sous-espaces E_{λ_i} sont somme directes

$$\implies \forall i \in \{1, 2, \dots, m-1\}, V_i = 0$$

car les valeurs propres sont distinctes.

En reportant dans $(*)$ on obtient $V_m = 0$. ■

Définition 1.2.3 La multiplicité d'une valeur propre est sa multiplicité en tant que zéros de $P_\varphi(X)$.

Remarque 1.2.4 Soit E_λ un sous espace propre associé à une valeur propre λ de $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, $\forall V = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_\lambda$, $\varphi(V) = \lambda V \iff (\varphi - \lambda I)V = 0$ soit matriciellement

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \vdots & \vdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ & \iff \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Théorème 1.2.5 Si λ est une valeur propre de $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\text{rang}(\varphi - \lambda I) = r$ alors $\dim E_\lambda = n - r$

Remarque 1.2.6 Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ sont des valeurs propres de $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ distinctes 2 à 2, de multiplicité m_1, m_2, \dots, m_r , alors

$$\begin{aligned} P_\varphi(X) &= (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_r)^{m_r} Q(X), \text{ avec } Q(\alpha) \neq 0, \forall \alpha \in \mathbb{K} \\ &\implies m_1 + m_2 + \cdots + m_r \leq n = \dim E \end{aligned}$$

Théorème 1.2.7 Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de multiplicité m de $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ alors

$$\dim E_\lambda \leq m$$

Preuve. Si $\dim E_\lambda \geq m + 1$, alors il existe une base $\{V_1, V_2, \dots, V_m, V_{m+1}, \dots, V_n\}$ contenant V telle que $V_1, V_2, \dots, V_m, V_{m+1} \in E_\lambda$. Ainsi relativement à V , la matrice $M(\varphi)$ prend la forme suivante

$$M(\varphi) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & C & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_{11} & \vdots & b_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{s1} & \vdots & b_{ss} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$P_\varphi(X) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda - X & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda - X & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & \lambda - X \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & C & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_{11} - X & \cdot & \cdot & b_{1s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{s1} & \cdot & \cdot & b_{ss} - X \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$P_\varphi(X) = (\lambda - X)^{m+1} \det(B - XI_s)$$

λ est de multiplicité $m + 1$ d'où la contradiction. ■

1.2.1 Diagonalisation

Définition 1.2.8 Un endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ est dit diagonalisable si et seulement si il existe une base V dans laquelle la matrice $M(\varphi)$ est diagonale.

Remarque 1.2.9 Si φ est diagonalisable dans une base \mathcal{V} , alors \mathcal{V} est constituée de vecteurs propres de φ uniquement. Réciproquement si E admet une seconde base constituée de vecteurs propres de φ uniquement, alors φ est diagonalisable dans cette base.

Corollaire 1.2.10 Pour chaque endomorphisme φ les assertions suivantes sont équivalentes

- i) φ est diagonalisable
- ii) Les deux conditions suivantes sont vérifiées
 1. $P_\varphi(X)$ est totalement réductible
 2. La dimension de chaque sous-espace propre est égale à la multiplicité de sa valeur propre associée.

Preuve. i) \implies ii) Il existe une base $\{v_1, \dots, v_n\}$ telle que $M(\varphi)$ soit diagonale, donc il existe $G \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n)$ régulière telle que $M(\varphi) = G^{-1}AG = A^* = [a_{ij}\delta_{ij}]$

$$P_\varphi(X) = P_{A^*}(X) = (a_1^* - X) \cdots (a_n^* - X)$$

d'où P_φ est totalement réductible.

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes et E_{λ_j} le sous-espace propre associé à λ_j , $j = 1, \dots, r$

$$\dim \left(\sum_{j=1}^r E_{\lambda_j} \right) = \dim \left(\bigoplus_{j=1}^r E_{\lambda_j} \right) = \sum_{j=1}^r \dim E_{\lambda_j} = \sum_{j=1}^r m_j$$

avec $m_j =$ multiplicité de la valeur propre λ_j

Si $m_{j_0} \geq \dim E_{\lambda_{j_0}}$

$$\implies \sum_{j=1}^r m_j = m_{j_0} + \sum_{j \neq j_0} m_j \geq \dim E_{\lambda_{j_0}} + \dim \bigoplus_{j \neq j_0} E_{\lambda_j}$$

$$n = \sum_{j=1}^r m_j \not\geq \dim E_{\lambda_{j_0}} + \dim \bigoplus_{j \neq j_0} E_{\lambda_{j_0}}$$

Ce qui est contraire avec φ diagonale

ii) \implies i) $P_\varphi(X)$ totalement réductible, soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de φ de multiplicités respectives m_j , $j = 1, \dots, r$ avec $\dim E_{\lambda_j} = m_j$

$$\dim \left(\bigoplus_{j=1}^r E_{\lambda_j} \right) = \sum_{j=1}^r m_j = n \implies \bigoplus_{j=1}^r E_{\lambda_j} = E$$

Par conséquent, E admet une base formée de vecteurs propres relativement à laquelle $M(\varphi)$ est diagonale. ■

Proposition 1.2.11 Dire que φ est diagonalisable revient à dire que $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{spec}_{\mathbb{K}}(\varphi)} E_\lambda$, où $E_\lambda = \ker(\varphi - \lambda I)$.

Preuve de la proposition. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ ($r \leq n$) les valeurs propres deux à deux distinctes de φ avec pour ordres de multiplicité m_1, m_2, \dots, m_r

$$i \neq j \implies E_i \cap E_j = \{0\}, \forall i, j \in [1, r]$$

Soit \mathcal{V} une base de E constituée de vecteurs propres, les éléments de \mathcal{V} se répartissent en paquets logés dans les divers sous espaces propres

Soit $\{V_{j1}, \dots, V_{jk}\} \subset E_{\lambda_j}$ ie base de E_{λ_j} ,

$\forall V \in \mathcal{V}$, on a $V = V_1 + \dots + V_r$, $V_j \subset E_{\lambda_j}$

$$E = \sum_{j=1}^n E_{\lambda_j} = \bigoplus_{j=1}^r E_{\lambda_j}$$

Réciproquement si $E = \bigoplus_{j=1}^r E_{\lambda_j}$, E admet une base constituée de vecteurs propres uniquement $\implies \varphi$ est diagonalisable ■

Théorème 1.2.12 Si $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ admet n valeurs propres distinctes 2 à 2 alors φ est diagonalisable.

Preuve. Soient E_1, E_2, \dots, E_n les sous espaces propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ $\dim E_j \geq 1, \forall j \in [1, n]$

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_n = \bigoplus_{j=1}^n E_j \implies \dim E = \dim \bigoplus_{j=1}^n E_j \geq n$$

$$E = \bigoplus_{j=1}^n E_j \implies \dim E = n \implies \varphi \text{ est diagonalisable}$$

■

1.2.2 Exemples et Applications

Exemple 1.2.13 Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

– Recherche de valeurs propres

$$P_A(X) = \det(A - XI) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -X & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -X & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -X \end{vmatrix}$$

Ajoutons la première ligne à toutes les autres lignes

$$\begin{vmatrix} -X & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -X & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -X & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -X \end{vmatrix} = (1 - X)^3 \begin{vmatrix} -X & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Retranchons à la première ligne la somme des trois autres lignes. On obtient ainsi le déterminant trigonal $P_A(X) = (1 - X)^3(-X - 3) = (X - 1)^3(X + 3)$, $\implies \text{spec}(A) = \{1, -3\}$

– Recherche de sous espaces propres

Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, la résolution de l'équation $AX = X$ conduit à $x - y - z - t = 0$,

E_1 est de dimension 3, on peut donc écrire $E_1 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

De même pour l'équation matricielle $AX = -3X$ conduit au système

$$\begin{cases} 3x + y + z + t = 0 \\ x + 3y - z - t = 0 \\ x - y + 3z - t = 0 \\ x - y - z + 3t = 0 \end{cases} \iff y = z = t = -x,$$

$$\text{soit } E_{-3} = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

– En conclusion on peut dire que A est diagonalisable car $\dim E_1 + \dim E_{-3} = 4 = \dim \mathbb{R}^4$

On peut prendre comme matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres, la matrice $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ on trouve alors $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

et $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exemple 1.2.14 D'abord pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, puis pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, étudier la possibilité de diagonaliser l'endomorphisme u de \mathbb{K}^3 , qui est déterminée dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) par la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

On commence par calculer $P_u(X) = X^3 + 4X$.

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ Ici $P_u(X) = X(X^2 + 4)$ n'est pas scindé sur \mathbb{R} donc u n'est pas diagonalisable.
- $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ Ici $P_u(X)$ est scindé sur \mathbb{C} . Admettant 3 valeurs propres distinctes :

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2i, \lambda_3 = -2i$$

l'endomorphisme $u \in \mathbb{C}^3$ est diagonalisable.

Les sous espaces propres associés E_1, E_2, E_3 sont donnés par les systèmes

$$(L_1) \begin{cases} 2\zeta_2 = 0 \\ -\zeta_1 + \zeta_3 = 0 \\ -2\zeta_2 = 0 \end{cases}, (L_2) \begin{cases} 2i\zeta_1 + 2\zeta_2 = 0 \\ -\zeta_1 + 2i\zeta_2 + \zeta_3 = 0 \\ -2\zeta_2 + 2i\zeta_3 = 0 \end{cases}, (L_3) \begin{cases} -2i\zeta_1 + 2\zeta_2 = 0 \\ -\zeta_1 + 2i\zeta_2 + \zeta_3 = 0 \\ -2\zeta_2 - 2i\zeta_3 = 0 \end{cases}$$

soit $(L'_1) \begin{cases} \zeta_2 = 0 \\ -\zeta_1 + \zeta_3 = 0 \end{cases}, (L'_2) \begin{cases} i\zeta_1 + \zeta_2 = 0 \\ \zeta_2 + i\zeta_3 = 0 \end{cases}, (L'_3) \begin{cases} -i\zeta_1 + \zeta_2 = 0 \\ -\zeta_2 + i\zeta_3 = 0 \end{cases}$

Donc $E_1 = \text{lin}\{(1, 0, 1)\}$, $E_2 = \text{lin}\{(-1, i, 1)\}$, $E_3 = \text{lin}\{(-1, -i, 1)\}$. Par conséquent la

matrice de passage est $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & i & -i \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -2i & 1 \\ -1 & 2i & 1 \end{bmatrix}$,

$$MP = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2i \\ 0 & -2i & -2 \\ 0 & 2i & -2i \end{bmatrix}, P^{-1}MP = D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{bmatrix}$$

Applications 1 : Puissance q^{eme} d'une matrice diagonalisable

Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice diagonalisable. Il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que la matrice $D = P^{-1}MP$ soit diagonale; on alors $M = PDP^{-1}$, P étant une projection, donc idempotent ($P^2 = P \implies P^q = P$ de même que P^{-1}) on a $M^q = PD^qP^{-1}$

Exemple 1.2.15 Reprenons la \mathbb{C} -matrice précédente $M = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Nous avons $M = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & i & -i \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -2i & 1 \\ -1 & 2i & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 2i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

M n'étant pas inversible, il ne sera question que de puissance positives.

On calcule pour tout $k > 0$,

$$D^k = (2i)^k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{bmatrix}, \quad D^k P^{-1} = \frac{(2i)^k}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2i & 1 \\ (-1)^{k+1} & (-1)^k 2i & (-1)^k \end{bmatrix}$$

$$\text{et } M^k = PD^k P^{-1} = \frac{(2i)^k}{4} \begin{bmatrix} 1 + (-1)^k & 2i(1 + (-1)^{k+1}) & -(1 + (-1)^k) \\ -i(1 + (-1)^{k+1}) & 2(1 + (-1)^k) & i(1 + (-1)^{k+1}) \\ -(1 + (-1)^{k+1}) & -2i(1 + (-1)^{k+1}) & 1 + (-1)^k \end{bmatrix}$$

Exemple 1.2.16 Discuter de la possibilité de diagonaliser l'endomorphisme $u \in \mathbb{K}^3$ qui est représentée dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) par la matrice $M = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Application 2 : Résolution des systèmes de récurrences

Dans le cas de p équations de récurrence linéaire faisant intervenir p suites $(u_n), (v_n), (w_n), \dots$, le système s'écrit sous une forme matricielle

$$X_{n+1} = MX_n \quad (7)$$

où X_n est une chronique vectorielle de p composantes u_n, v_n, w_n, \dots , et M une matrice carrée d'ordre p . La solution générale de (7) est

$$X_n = M^n X_0$$

Cette solution s'obtient aisément lorsque M est diagonalisable en écrivant $M = PDP^{-1}$, P est la matrice de passage, alors

$$M^n = PD^n P^{-1}$$

Exemple 1.2.17 a) Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) Calculer A^n

c) Soient les suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ définies par $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et les relations de récurrences :

$$\begin{cases} u_n = 3u_{n-1} + v_{n-1} - w_{n-1} \\ v_n = -u_{n-1} + v_{n-1} + w_{n-1} \\ w_n = u_{n-1} + v_{n-1} + w_{n-1} \end{cases}$$

calculer u_n, v_n, w_n en fonction de n

$$1) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 1 & -1 \\ -1 & 1-X & 1 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix} = (X-1)(X-2)^2$$

$$\text{spect}(A) = \{1, (\text{simple}), 2 (\text{double})\}$$

$$E_1 = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -x + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = z = -y \right\}$$

$$\Rightarrow E_1 = \text{vect}\{V_1\} \text{ avec } V_1 = (1, -1, 1)$$

$$E_2 = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = x + y \right\}$$

$$\Rightarrow E_2 = \text{vect}\{V_2, V_3\} \text{ avec } V_2 = (1, 0, 1), V_3 = (0, 1, 1)$$

Par conséquent A est diagonalisable et on a :

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} -1 + 2^{n+1} & -1 + 2^n & 1 - 2^n \\ 1 - 2^n & 1 & -1 + 2^n \\ -1 + 2^n & -1 + 2^n & 1 \end{bmatrix}$$

2)

$$\begin{cases} u_n = 3u_{n-1} + v_{n-1} - w_{n-1} \\ v_n = -u_{n-1} + v_{n-1} + w_{n-1} \\ w_n = u_{n-1} + v_{n-1} + w_{n-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \\ w_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 2^{n+1} & -1 + 2^n & 1 - 2^n \\ 1 - 2^n & 1 & -1 + 2^n \\ -1 + 2^n & -1 + 2^n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix}$$

$$u_n = (-1 + 2^{n+1})u_0 + (-1 + 2^n)v_0 + (1 - 2^n)w_0$$

$$v_n = (1 - 2^n)u_0 + v_0 + (-1 + 2^n)w_0$$

$$w_n = (-1 + 2^n)u_0 + (-1 + 2^n)v_0 + w_0$$

Pour $u_0 = v_0 = w_0 = 1$, on obtient

$$u_n = -1 + 2^{n+1}$$

$$v_n = 1$$

$$w_n = -1 + 2^{n+1}$$

1.2.3 Trigonalisation

Définition 1.2.18 Un endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ est dit *triangularisable* si et seulement si il existe une base dans laquelle $M(\varphi)$ est triangulaire.

Lemme 1.2.19 Pour tout les endomorphismes, les conditions suivantes sont équivalentes

- (i) M_φ est triangulaire
- (ii) F_j le sous espace engendré par u_1, u_2, \dots, u_n est stable par φ (ie $\varphi(F_j) \subset F_j$)

Preuve. (i) \implies (ii) $A = M_\varphi$ triangulaire supérieure, $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq 1} / a_{ij} = 0$ si $i > j$

$$\varphi(u_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} u_i = \sum_{i=1}^j a_{ij} u_i + \underbrace{\sum_{i=j+1}^n a_{ij} u_i}_{=0} = \sum_{i=1}^j a_{ij} u_i \in F_j$$

$$(ii) \implies (i) A = M(\varphi) = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq 1} / \varphi(F_j) \subset F_j$$

$$\forall k = 1, 2, \dots, j, \varphi(u_j) = \sum_{i=1}^j a_{ij} u_i \implies a_{ij} = 0 \text{ si } i > j$$

■

Définition 1.2.20 Un polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ est dit *totalement réductible* si et seulement si il a tout ces zéros dans \mathbb{K} ie il peut se mettre sous la forme d'un produit de polynômes de premier degré.

Théorème 1.2.21 Un endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ est triangularisable si et seulement si $P_\varphi(X)$ est totalement réductible.

Preuve. Soit $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ une seconde base $B = [v_1, v_2, \dots, v_n]$
 \implies)

$$A^* = B^{-1}AB \implies P_\varphi(X) = P_{A^*}(X) = \det(A - XI)$$

$$A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} / a_{ij} = 0 \text{ si } i > j$$

$$\det(A - XI) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - X)$$

$\implies P_\varphi(X)$ est totalement réductible

$$\iff P_\varphi(X) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - X)$$

Soit λ une valeur propre de φ et v un vecteur propre associé à λ alors $v \neq 0$ et $\{v, u_2, \dots, u_n\}$ est une base relativement à laquelle

$$M(\varphi) = \begin{bmatrix} \lambda & b_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{2n} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & b_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{nn} \end{bmatrix} \text{ avec } D = \begin{bmatrix} b_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{nn} \end{bmatrix} \text{ est une matrice}$$

carrée d'ordre $n-1$

$$P_\varphi(X) = \begin{vmatrix} \lambda - X & b_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & B_{1n} \\ 0 & b_{22} - X & \cdot & \cdot & \cdot & b_{2n} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & b_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{nn} - X \end{vmatrix} = (\lambda - X) \det(D - XI_{n-1})$$

$$= (\lambda - X)P_D(X)$$

$P_D(X)$ est totalement réductible, D est la matrice d'un endomorphisme $\psi \in \mathcal{L}(E')$ avec $\dim E' = n-1 \implies \psi$ est triangularisable ie il existe $\mathcal{W} = \{w_2, w_3, \dots, w_n\}$ base de $E' / M(\psi)$ est triangulaire.

En posant $v_1 = v, v_2 = v + w_2, \dots, v_n = v + w_n$

On obtient une base $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ relativement à laquelle

$$M(\varphi) = \begin{bmatrix} \lambda & \times & \cdot & \cdot & \times \\ 0 & \lambda_2 & \times & \times & \times \\ \cdot & \cdot & \cdot & \times & \times \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \times \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \blacksquare$$

Exemple 1.2.22 Etudier la possibilité de trigonaliser l'endomorphisme $u \in \mathbb{K}$ représenté

dans la base canonique par la matrice : $M = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$

Le polynôme caractéristique est $P_u(X) = (X+2)^3$, nous avons $E_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ donc

u n'est pas diagonalisable, par contre $P_u(X)$ est scindé dans \mathbb{R} , donc u est trigonalisable. Nous choisissons un sous espace supplémentaire de $\mathbb{R}v_1$ avec $v_1 = (-1, 1, 1)$ par exemple le plan E' dont une base est (e_1, e_2) . En utilisant que $e_3 = v_1 + e_1 - e_2$, nous calculons

$$\begin{aligned} u(e_1) &= -3e_1 + e_2 + 2(v_1 + e_1 - e_2) = 2v_1 - e_1 - e_2 \\ u(e_2) &= -3e_1 + e_2 + 4(v_1 + e_1 - e_2) = 4v_1 + e_1 - 3e_2 \end{aligned}$$

Etant donné que $u(v_1) = -2v_1$, nous en déduisons que

$$M(u; (v_1, e_1, e_2)) = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Soit p la projection de u parallèlement à $\mathbb{R}v_1$ et u' l'endomorphisme de E' , induit sur E' par $p \circ u$. Nous avons

$$M(u'; (e_1, e_2)) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

On vérifie que $P_u(X) = (X+2)^2$, nous sommes ramenés à diagonaliser u' . Le sous espace propre de u' associé à -2 est engendré par $v_2 = e_1 - e_2$. Dans toute base (v_2, v_3) de E' , u' est représentée par une matrice au moins triangulaire supérieure. Pour se fixer les idées, choisissons $v_3 = e_2$, en utilisant $e_1 = v_2 + v_3$, nous concluons

$$\begin{aligned} u(v_2) &= u(e_1) - u(e_2) = -2v_1 - 2v_2, \\ u(v_3) &= 4v_1 + v_2 - 2v_3 \end{aligned}$$

Finalement la matrice de passage de la base (e_1, e_2, e_3) à la base (v_1, v_2, v_3) et son inverse s'écrivent

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T = P^{-1}MP = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

1.3 Polynôme d'endomorphisme - Théorème de Cayley-Hamilton

E est un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}(= \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$

$\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E , $S(X) \in \mathbb{K}[X]$, $\varphi \in \mathcal{L}(E)$

$$P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_m X^m, \quad \varphi^0 = I, \quad \varphi^k = \varphi \circ \varphi^{k-1}$$

Par substitution de φ à X dans $P(X)$, on obtient

$$P(\varphi) = \alpha_0 I + \alpha_1 \varphi + \cdots + \alpha_m \varphi^m \in \mathcal{L}(E)$$

Théorème 1.3.1 L'application φ_u qui au polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ associe l'endomorphisme $P(u)$ de façon que

$$P(X) = \sum_0^\infty \alpha_k X^k \longmapsto P(u) = \sum_0^\infty \alpha_k u^k, \quad (u^0 = Id_E)$$

est un morphisme de la \mathbb{K} -algèbre $\mathbb{K}[X]$ dans la \mathbb{K} -algèbre $\mathcal{L}(E)$

Preuve. En effet pour tout triplet $(\lambda, P, Q) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$, avec

$$P(X) = \sum_0^\infty \alpha_k X^k, \quad Q(X) = \sum_0^\infty \beta_k X^k,$$

on calcule $u^p \circ u^q = u^{p+q}$,

$$\begin{aligned} P(u) + Q(u) &= \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k + \beta_k) u^k = (P + Q)(u) \\ P(u) \circ Q(u) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k \alpha_j \beta_{k-j} \right) u^k = (PQ)(u) \\ \lambda P(u) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k u^k = (\lambda P)(u) \end{aligned}$$

D'autre part $\varphi_u(1) = 0$ ■

$\chi : S(X) \longrightarrow S(\alpha)$ définie un morphisme de \mathbb{K} -algèbre

$$[S(X)T(X)] \longrightarrow [S(\alpha)T(\alpha)]$$

$$\chi : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E)$$

$$\chi(S + T) \longrightarrow \chi(S) + \chi(T)$$

$$\chi(\lambda S) \longrightarrow \lambda \chi(S) \quad \chi \text{ est un } \mathbb{K}\text{-algèbre, } \chi \text{ est un idéal non nul de } \mathbb{K}[X]$$

$$\chi(ST) \longrightarrow \chi(S)\chi(T)$$

Puisque $\{\mathfrak{S}, \varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^{n^2}\}$ compte $(n^2 + 1)$ éléments $\implies \exists Q(X) \in \mathbb{K}[X]$ engendrant $\ker \chi$

Définition 1.3.2 Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, on appelle polynôme minimal de φ , l'unique polynôme normalisé de degré minimal engendrant $\ker \chi$, noté $Q_\varphi(X)$

Le polynôme minimal est le seul polynôme normalisé de degré minimal vérifiant

$$\chi[Q_\varphi(X)] \equiv 0 \quad \text{ie} \quad Q_\varphi(\varphi) = 0$$

Théorème 1.3.3 (Cayley-Hamilton) Soit E un sous-espace vectoriel de dimension n sur \mathbb{K} . Si $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, alors le polynôme minimal $Q_\varphi(X)$ de φ divise le polynôme caractéristique $P_\varphi(X)$.

Remarque 1.3.4 Le théorème signifie que tout endomorphisme annule son polynôme caractéristique $P_\varphi(\varphi) = 0$

Preuve. $M(\varphi) = A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$, $I_n = I$, $B(X) = [b_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$, avec $b_{ij} = a_{ij} - X\delta_{ij}$

$$B(X) = \begin{bmatrix} a_{11} - X & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - X & a_{2n} \\ & & \\ a_{n1} & & a_{nn} - X \end{bmatrix}$$

On considère la comatrice $C(X)$ de $B(X)$ et ${}^t C(X)$ = matrice adjointe de $B(X)$

$$B(X) {}^t C(X) = {}^t C(X) \cdot B(X) = (\det B) I$$

Soit

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} c_{jk} = \sum_{k=1}^n c_{ik} b_{jk} = P_\varphi(\varphi)$$

$$\begin{aligned}
P_\varphi(X)\delta_{ij} &= \sum_{k=1}^n c_{ik}b_{jk} = \sum_{k=1}^n c_{ik}(X)[a_{jk} - X\delta_{jk}] \\
P_\varphi(\varphi)\delta_{ij} &= \sum_{k=1}^n [c_{ik}(\varphi)] \cdot [a_{jk}\mathfrak{S} - \varphi\delta_{jk}], \quad \varphi(v_k) = \sum_{j=1}^n a_{jk}u_j \\
[P_\varphi(\varphi)\delta_{ij}](v) &= \sum_{k=1}^n [c_{ik}(\varphi)] \cdot [a_{jk}\mathfrak{S} - \varphi\delta_{jk}](v)
\end{aligned}$$

Or

$$\sum_{j=1}^n [a_{jk}\mathfrak{S} - \varphi\delta_{jk}]u_k = \sum_{j=1}^n [a_{jk}u_j - \varphi(u_k)] = 0$$

En substituant à v u_1, \dots, u_n on obtient

$$\begin{aligned}
[P_\varphi(\varphi)\delta_{ij}](u_1) &= \sum_{k=1}^n [c_{ik}(\varphi)] \cdot [a_{jk}\mathfrak{S} - \varphi\delta_{jk}](u_1) \\
[P_\varphi(\varphi)\delta_{ij}](u_2) &= \sum_{k=1}^n [c_{ik}(\varphi)] \cdot [a_{jk}\mathfrak{S} - \varphi\delta_{jk}](u_2) \\
&\vdots \\
[P_\varphi(\varphi)\delta_{ij}](u_n) &= \sum_{k=1}^n [c_{ik}(\varphi)] \cdot [a_{jk}\mathfrak{S} - \varphi\delta_{jk}](u_n)
\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_\varphi(\varphi)(u_1) = 0 \\ P_\varphi(\varphi)(u_2) = 0 \\ \vdots \\ P_\varphi(\varphi)(u_n) = 0 \end{array} \right. \implies P_\varphi(\varphi) = 0$$

■

Théorème 1.3.5 (Décomposition des noyaux) *E est un espace vectoriel de dimension n sur \mathbb{K} , $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{K}[X]$ on suppose que les polynômes $P_1(X), \dots, P_r(X)$ sont premiers entre eux, et soit l'endomorphisme composé $[P_1(\varphi)] \circ [P_2(\varphi)] \circ \dots \circ [P_r(\varphi)] = P$. On considère le sous-espace de E stable par u .*

$$\mathcal{N} = \ker(P), \quad \mathcal{N}_i = \ker(P_i), \quad 1 \leq i \leq r$$

Alors \mathcal{N} est somme directe des \mathcal{N}_i

$$\text{ie } \ker([P_1(\varphi)] \circ [P_2(\varphi)] \circ \dots \circ [P_r(\varphi)]) = \bigoplus_{i=1}^r \ker(P_i(\varphi))$$

Preuve.

- Le cas $r = 1$ est triviale
- Cas $r = 2$, ici P est le produit de deux polynôme P_1 et P_2 premier entre eux. D'après le théorème de Bezout, il existe deux polynômes $Q_1(X)$ et $Q_2(X)$ tels que

$$Q_1(X)P_1(X) + Q_2(X)P_2(X) = 1$$

d'où

$$e = Q_1(u) \circ P_1(u) + Q_2(u) \circ P_2(u)$$

que nous écrivons simplement

$$e = Q_1 \circ P_1 + P_2 \circ Q_2 \quad (\star)$$

Nous utilisons alors la commutativité de l'algèbre $\mathbb{K}[u]$.

Montrons que $\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2 = \{0\}$, d'après (\star)

$$\forall x \in E, \quad x = Q_1(P_1(x)) + Q_2(P_2(x))$$

Or pour tout $x \in \mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2$, $P_1(x) = P_2(x) = 0$

Montrons que $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2$. D'après (\star) , tout $x \in \mathcal{N}$ s'écrit

$$x = x_1 + x_2 \quad \text{avec } x_i = Q_i(P_i(x_i)) \quad 1 \leq i \leq 2$$

On a

$$P_2(x_1) = (P_2 \circ Q_1 \circ P_1)(x) = (Q_1 \circ P_1 \circ Q_2)(x)$$

$P_2(x_1)$ est l'image de par Q_1 de $(P_1 \circ P_2)(x) = 0$ puisque $P_1 \circ P_2$ est $P(u)$ et puisque $x \in \ker P(u)$

Ainsi $x_1 \in \mathcal{N}_2$ et, de même $x_2 \in \mathcal{N}_1$

Montrons que $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}$. Pour tout $x \in \mathcal{N}_1$ on a $P_1(x) = 0$, ce qui entraîne $P_2(P_1(x)) = 0 \iff p(x) = 0$, (avec $p = P(u)$)

On montre de la même façon que $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{N}$; on en déduit que $\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2 \subset \mathcal{N}$.

Et par conséquent on a $\mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2 = \mathcal{N}$

- Cas $r \geq 3$. On suppose que le théorème est démontré à l'ordre $r-1$ et on considère le produit $P = P_1 P_2 \cdots P_r$ de polynômes premiers entre eux deux à deux. On applique le résultat précédent aux deux polynômes P_1 et $Q = P_2 P_3 \cdots P_r$, qui sont premiers entre eux; on obtient ainsi

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \oplus \ker(Q)$$

Or d'après l'hypothèse de récurrence $\ker(Q)$ est somme directe de \mathcal{N}_i , $2 \leq i \leq r$. ce qui donne le résultat.

■

1.4 Sous-espaces caractéristiques (ou spectraux)

Soit φ un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie n non nulle. Nous supposons que le polynôme caractéristique P_φ de φ est scindé dans \mathbb{K} . Nous avons ainsi

$$P_\varphi(X) = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{r_i}, \quad (*)$$

en désignant par $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de φ , par r_1, \dots, r_r leurs multiplicités

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme minimal Q_φ de φ divise P_φ , comme il admet chaque λ_i comme racine, et il est unitaire, il s'écrit :

$$Q_\varphi(X) = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{q_i}, \quad 1 \leq q_i \leq r_i.$$

Posons $N_i = \ker(\varphi - \lambda_i I)^{q_i}$. Nous allons montrer que q_i est l'indice [[de l'endomorphisme]] $\varphi - \lambda_i I$

Ayant fixé i ($1 \leq i \leq r$), on applique le théorème de la décomposition des noyaux avec

$$\xi_i(X - \lambda_i)^{l_i} \quad \text{et} \quad \xi_j = (X - \lambda_j)^{q_j} \quad \text{pour } j \neq i$$

Nous obtenons $(\xi(X))$ ici $Q_\varphi(X)$:

$$E = N_i \oplus G_i \quad \text{avec} \quad G_i = \bigoplus_{j \neq i} N_j \quad (**)$$

En appliquant le même théorème avec cette fois

$$\xi_i = (X - \lambda_i)^{l_i}, \quad \text{et} \quad \xi_j = (X - \lambda_j)^{q_j} \quad \text{pour } j \neq i$$

Nous obtenons $(\xi(X))$ étant ici $(X - \lambda_i)^{l_i} \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)^{q_j}$:

$$\ker \xi(\varphi) = \ker(u - \lambda_i I)^{l_i} \oplus G_i \quad (***)$$

- Si $l_i \geq q_i$, (en particulier si $l_i = r_i$), le polynôme P qui intervient dans $(***)$ est un multiple du polynôme minimal Q_φ ; le noyau de $\xi(\varphi)$ est E ; compte tenu de $\ker(\varphi - \lambda_i I)^{l_i} \supset N_i$, la comparaison de $(**)$ et $(***)$ fournit grâce à des considérations de dimensions $\ker(\varphi - \lambda_i I)^{l_i} = N_i$
- Si $l_i < q_i$, le polynôme ξ , dont le degré est strictement inférieur au degré de Q_φ ne peut être multiple de Q_φ ; on a $\xi(\varphi) \neq 0$ et $\ker \xi(\varphi) \neq E$, ce qui exige l'inclusion stricte $\ker(\varphi - \lambda_i I)^{l_i} \subset N_i$
- Reprenons $E = \bigoplus_{i=1}^r N_i$ et soit φ_i l'endomorphisme induit par φ sur le sous-espace stable N_i

D'après le théorème précédent, le polynôme minimal de φ_i est $(X - \lambda_i)^{q_i}$, le polynôme caractéristique de φ_i est donc $(X - \lambda_i)^{r_i}$ avec $r_i = \dim N_i$ on en déduit que le polynôme caractéristique de φ est

$$P_\varphi(X) = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{r_i} \quad (***)$$

En comparant (*) et (***) on constate que : $\dim N_i = r_i$ ($1 \leq i \leq r$). En conclusion :

Théorème 1.4.1 (Théorème et Définition) *Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle n , et φ un endomorphisme de E qui admet un polynôme caractéristique de la forme :*

$$P_\varphi(X) = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{r_i} \quad (\text{les } \lambda_i \text{ deux à deux distinctes, les } m_i \text{ non nuls})$$

Alors le polynôme minimal s'écrit

$$Q_\varphi(X) = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{q_i} \quad 1 \leq q_i \leq r_i$$

L'ordre de multiplicité q_i de la racine λ_i de Q_φ est l'indice de l'endomorphisme $\varphi - \lambda_i I$. Le sous-espace vectoriel de E :

$$N_i = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \ker(\varphi - \lambda_i I)^k,$$

qui est aussi bien le noyau de $(\varphi - \lambda_i I)^{q_i}$ que celui de $(\varphi - \lambda_i I)^{r_i}$, est dit sous-espace caractéristique (ou spectral) associé à la valeur propre λ_i , sa dimension est q_i

E est la somme directe des N_i , $1 \leq i \leq r$. L'endomorphisme φ_i induit par φ sur N_i admet $(X - \lambda_i)^{r_i}$ pour polynôme caractéristique et $(X - \lambda_i)^{q_i}$ pour polynôme minimal. L'endomorphisme $\psi_i = \varphi_i - \lambda_i \text{Id}_{N_i}$ est nilpotent d'indice q_i

Ce théorème permet de caractériser les endomorphismes diagonalisables

Proposition 1.4.2 *Un endomorphisme φ d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie non nulle n est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé dans \mathbb{K} et n'admet que des zéros simples.*

Preuve. La condition est nécessaire : Par hypothèse, φ est diagonalisable. Son polynôme caractéristique et par suite son polynôme minimal sont scindés sur \mathbb{K} . On peut écrire

$$E = \bigoplus_i N_i \quad \text{avec } N_i = \ker(\varphi - \lambda_i I)^{q_i}$$

D'autre part l'endomorphisme φ étant diagonalisable, E est somme directe des espaces propres, ce qui s'écrit

$$E = \bigoplus_i E_i \quad \text{avec} \quad E_i = \ker(\varphi - \lambda_i I)$$

Compte tenu des inclusions $E_i \subset N_i$, on a, grâce à des considérations de dimensions : pour tout i , $E_i = N_i$, ce qui d'après la définition de l'indice, exige $q_i = 1$, or q_i est l'ordre de multiplicité de λ_i du polynôme minimal.

La condition est suffisante : L'hypothèse est ici $Q_\varphi(X) = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)$, les λ_i étant des vecteurs propres deux à deux distinctes de φ , on en déduit que $E = \bigoplus_i \ker(\varphi - \lambda_i I)$, somme directe des sous-espaces propres ; φ est donc diagonalisable. ■

1.5 Endomorphismes nilpotents - Réduction de Jordan

E est un espace vectoriel de dimension finie n sur \mathbb{C} .

Définition 1.5.1 *Un endomorphisme φ ($\varphi \in \mathcal{L}(E)$) est dit nilpotent si et seulement si il existe $m \in \mathbb{N}$ / $\varphi^m = 0$*

L'indice de nilpotence de φ est le plus petit entier r tel que $\varphi^r = 0$ et $\varphi^{r-1} \neq 0$

Remarque 1.5.2 *Si φ est nilpotent d'indice m , alors*

– *Le polynôme caractéristique de φ $P_\varphi(X) = (-X)^m$*

– *Le polynôme minimal de φ $Q_\varphi(X) = (X)^\mu$, $1 \leq \mu \leq m$*

Inversement si $P_\varphi(X)$ a tous ses zéros nuls ie $P_\varphi(X) = (-X)^n$, comme $P_\varphi(\varphi) = 0$, alors $(-1)^n \varphi^n = 0$ donc φ est nilpotent

$Q_\varphi(X)$ divise $P_\varphi(X) \implies Q_\varphi(X) = X^\mu$, $1 \leq \mu \leq n$, comme $Q_\varphi(\varphi) = 0$ alors indice de nilpotence = degré de $Q_\varphi(X)$

φ est nilpotent alors $M(\varphi)$ est nilpotente de même indice.

Réduction des endomorphismes nilpotents

Lemme 1.5.3 *Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n , φ un endomorphisme nilpotent de E . Alors il existe une base B de E telle que l'on ait :*

$$M_B(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_1 & & & 0 \\ & 0 & \varepsilon_2 & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot \\ 0 & & & & \varepsilon_{n-1} \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{avec } \varepsilon_i = \begin{cases} 0 \\ \text{ou } \forall i \\ 1 \end{cases} \quad (\star)$$

Définition 1.5.4 Une matrice élémentaire de Jordan est une matrice de la forme (★)

Preuve du lemme. $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent, $P_\varphi(X)$ son polynôme caractéristique et $Q_\varphi(X)$ son polynôme minimal, $P_\varphi(X) = (-X)^n$, $Q_\varphi(X) = X^\mu$, $1 \leq \mu \leq n$

1. Cas $\mu = n$

$$Q_\varphi(\varphi) = \varphi^\mu = 0; \varphi^{\mu-1} \neq 0 \implies \exists v \in E \text{ tel que } \varphi^{\mu-1}(v) \neq 0$$

On utilise une récurrence décroissante et on détermine une suite de vecteurs que l'on montre que c'est une base de E

$$\begin{aligned} v_n &= \varphi^0(v) = v \\ v_{n-1} &= \varphi(v_n) = \varphi(v) \\ v_{n-2} &= \varphi(v_{n-1}) = \varphi(\varphi(v_n)) = \varphi^2(v_n) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ v_2 &= \varphi(v_3) = \varphi^{n-2}(v_n) = \varphi^{n-2}(v) \\ v_1 &= \varphi(v_2) = \varphi^{n-1}(v_n) = \varphi^{n-1}(\varphi v) \end{aligned}$$

$0 \notin \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. De plus $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est une base de E

En effet si

$$\sum_{j=1}^n \beta_j v_j = 0 \text{ alors } \forall k \in \mathbb{N} \quad \sum_{j=1}^n \beta_j \varphi^k(v_j) = 0 \quad \beta_j \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} \implies \sum_{j=1}^n \beta_j \varphi^k(\varphi^{n-j}(v)) &= \sum_{j=1}^n \beta_j \varphi^{n+k-j}(v) = \sum_{j=k+1}^n \beta_j \varphi^{n+k-j}(v) \\ &= \sum_{j=k+1}^n \beta_j \varphi(v_{j-k+1}) = \sum_{j=k+1}^n \beta_j v_{j-k} \end{aligned}$$

$$k = n-1, j = n,$$

$$\sum_{j=k+1}^n \beta_j v_{j-k} = \beta_n v_1 = 0 \implies \beta_n = 0$$

$$k = n-2, j = n-1, n$$

$$\sum_{j=k+1}^n \beta_j v_{j-k} = \beta_n v_2 + \beta_{n-1} v_1 = 0 \implies \beta_{n-1} = 0 \text{ car } \beta_n = 0$$

\vdots

$$k = 1, j = 2, \dots, n$$

$$\sum_{j=k+1}^n \beta_j v_{j-k} = \beta_2 v_1 + \beta_3 v_2 + \dots + \beta_n v_{n-1} = 0 \implies \beta_2 v_1 = 0 \implies \beta_2 = 0$$

$$\implies \beta_1 = 0$$

La matrice de φ sur la base $\{v_1, \dots, v_n\}$ est

$$\begin{array}{cccc} \varphi(v_1) & \dots & \cdot & \varphi(v_n) \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \cdot & \\ & & \cdot & 1 \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{array} \right] \end{array}$$

2. Cas général $\mu \neq n$

Il s'agit de trouver une expression de E sous forme d'une somme directe des sous espaces invariants par φ , de plus $d^0 Q_{\varphi^k}(X) = \dim E_k$ ($P_{\varphi}(X) = (-X)^n$, $Q_{\varphi}(X) = X^{\mu}$)

Le noyau des endomorphismes $\{\varphi^0 = \mathfrak{S}, \varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^{\mu-1}, \varphi^{\mu}\}$ forme une suite strictement croissante des sous-espace de E

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 = \ker \varphi^0 & \subsetneq & \ker \varphi & \subsetneq & \dots & \subsetneq & \ker \varphi^{\mu-2} & \subsetneq & \ker \varphi^{\mu-1} & \subsetneq & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \dots & & \downarrow & & \downarrow & & \text{acev } F_k = \ker \varphi^k \\ F_0 & \subsetneq & F_1 & \subsetneq & \dots & \subsetneq & F_{\mu-2} & \subsetneq & F_{\mu-1} & \subsetneq & F_{\mu} = E \end{array}$$

On sait que $\varphi^{\mu-1} \neq 0 \implies F_{\mu-1} \subsetneq F_{\mu}$. Soit G_{μ} un supplémentaire quelconque de $F_{\mu-1}$ dans $F_{\mu} \implies F_{\mu} = G_{\mu} \oplus F_{\mu-1}$

$$\implies x \in G_{\mu} \text{ alors } \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x) \in F_{\mu-1} \text{ puisque } \varphi^{(\mu-1)}(\varphi(x)) = \varphi^{\mu}(x) = 0 \quad (1) \\ \varphi(x) \notin F_{\mu-2} \text{ puisque } \varphi^{(\mu-2)}(\varphi(x)) = \varphi^{\mu-1}(x) \neq 0 \quad (2) \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \implies \varphi(G_{\mu}) \subset F_{\mu-1} \\ (2) \implies \varphi(G_{\mu}) \cap F_{\mu-2} = \{0\} \end{array} \right\} \implies F_{\mu-2} \subsetneq F_{\mu-1}$$

Soit $G_{\mu-1}$ un supplémentaire quelconque de $F_{\mu-2}$ dans $F_{\mu-1}$, de manière analogue on a

$$\left. \begin{array}{l} (1) \implies \varphi(G_{\mu-1}) \subset F_{\mu-2} \\ (2) \implies \varphi(G_{\mu-1}) \cap F_{\mu-3} = \{0\} \end{array} \right\} \implies F_{\mu-3} \subsetneq F_{\mu-2}$$

Par conséquent

Soit $G_{\mu-k}$ un supplémentaire quelconque de $F_{\mu-k+1}$ dans $F_{\mu-k}$, de manière analogue on a

$$\left. \begin{array}{l} (1) \implies \varphi(G_{\mu-k}) \subset F_{\mu-k+1} \\ (2) \implies \varphi(G_{\mu-k}) \cap F_{\mu-k+1} = \{0\} \end{array} \right\} \implies F_{\mu-k} \subsetneq F_{\mu-k+1}$$

G_1 supplémentaire de F_0 dans F_1 , alors $E = G_1 \oplus G_2 + \cdots \oplus G_\mu$

Soit $\{v_{\mu_1}, v_{\mu_2}, \cdots, v_{\mu_n}\}$ une base de G_μ , alors $\{\varphi(v_{\mu_1}), \varphi(v_{\mu_2}), \cdots, \varphi(v_{\mu_n})\}$ est libre dans $G_{\mu-1}$ qui se complète en une base de $\{\varphi(v_{\mu_1}), \varphi(v_{\mu_2}), \cdots, \varphi(v_{\mu_n}), v_{\mu-1, n\mu+1}, \cdots, v_{\mu-1, n\mu+1}\} = B$. L'image de B

$$\{\varphi^2(v_{\mu_1}), \varphi^2(v_{\mu_2}), \cdots, \varphi^2(v_{\mu_n}), \varphi(v_{\mu-1, n\mu+1}), \cdots, \varphi(v_{\mu-1, n\mu+1})\}$$

est une base de E ■

Théorème 1.5.5 (de Jordan) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r\}$ le spectre de A . Alors A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} T_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T_r \end{pmatrix}$$

où chaque bloc diagonale T_i est de la forme

$$T_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon & \\ & \ddots & \varepsilon \\ & & \lambda_i \end{pmatrix}, \varepsilon = 0 \text{ ou } 1$$

c'est-à-dire $T_i - \lambda_i \mathfrak{S}$ est une matrice élémentaire de Jordan.

Preuve. Soit φ l'endomorphisme canoniquement associé à A et notons φ_i la restriction de φ au sous espace caractéristique C_{λ_i} (qui est stable) on a : $(\varphi_i - \lambda_i \text{Id}_{C_{\lambda_i}})^{m_i} = 0 \in \mathcal{L}(C_{\lambda_i})$. Donc $\varphi_i - \lambda_i \text{Id}_{C_{\lambda_i}}$ est nilpotent et il existe une base \mathcal{B}_i de C_{λ_i} où cet endomorphisme se traduit par une matrice élémentaire de Jordan. La matrice $\varphi_i - \lambda_i \text{Id}$ étant scalaire, il vient que

$$M_{\mathcal{B}_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon & & 0 \\ & \cdot & \ddots & \\ & & \cdot & \varepsilon \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}; \quad \varepsilon = 0 \text{ ou } 1$$

Comme $\bigoplus_{i=1}^r C_{\lambda_i} = C^n$, la famille $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \cdots, \mathcal{B}_r\}$ est une base de C^n et $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ a la forme voulue. ■

Exemple 1.5.6 On dit qu'un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension n sur \mathbb{K} est nilpotent d'indice p , s'il existe $p > 1$ tel que $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$. On dira de même qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente d'indice p s'il existe $p > 1$ tel que $A^{p-1} \neq 0$ et $A^p = 0$.

1. a) Montrer que si f est nilpotent et s'il existe $\theta \in \mathbb{K}$ et $x \neq 0$ de E tel que $f(x) = \theta x$ alors $\theta = 0$
- b) f étant nilpotent d'indice p , démontrer que si x est tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$, les vecteurs

$$x = f^0(x), f^1(x), \dots, f^{p-1}(x)$$

sont linéairement indépendants

- c) En déduire que f est nilpotent d'indice n , si et seulement si il existe une base (a_i) de E telle que pour la matrice

$$A = M(f, (a_i)) = \alpha_{ij}$$

tous les α_{ij} sont nuls sauf $\alpha_{i,i+1} = 1$ ($1 \leq i \leq n-1$).

2. A étant une matrice nilpotente d'indice p de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Démontrer que $I_n - A$ est inversible et calculer son inverse.
3. Application : On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $N = A - I_4$ est nilpotente. En déduire A^k pour $k \in \mathbb{K}$ (remarquer que I_4 et N commutent).

Solution :

- 1) a) Supposons qu'il $\exists \theta \in \mathbb{K} / f(x) = \theta x, x \neq 0$
 f étant linéaire alors $f(f(x)) = f(\theta x) = \theta f(x)$
 f étant nilpotente d'indice p

$$\implies f^p(x) = 0 \text{ or } f^p(x) = f^{p-1}(f(x)) = f^{p-1}(\theta x) = \theta f^{p-1}(x) = 0 \quad (*)$$

comme $f^{p-1}(x) \neq 0$ il en découle que $\theta = 0$

- b) Soit $x / f^{p-1}(x) \neq 0$. Supposons qu'il existe $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{K} /$

$$\lambda_0 f^0(x) + \lambda_1 f^1(x) + \dots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x) = 0$$

On a alors

$$f[\lambda_0 f^0(x) + \lambda_1 f^1(x) + \dots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x)] = f(0) = 0$$

$$\lambda_0 f^1(x) + \lambda_1 f^2(x) + \dots + \lambda_{p-1} f^p(x) = 0$$

$f^p(x) = 0$, l'égalité précédente devient

$$\lambda_0 f^1(x) + \lambda_1 f^2(x) + \dots + \lambda_{p-2} f^{p-1}(x) = 0$$

Puis on réitère l'opération $p-1$ fois et on obtient $\lambda_0 f^{p-1}(x) + \lambda_1 f^p(x) = 0 \implies \lambda_0 f^{p-1}(x) = 0$, ce qui d'après a) implique que $\lambda_0 = 0$, puis on revient à l'ordre $p-1$ et on obtient $\lambda_1 f^{p-1}(x) + \lambda_2 f^p(x) = 0 \implies \lambda_1 = 0$. De proche en proche on obtient $\lambda_{p-2} f^{p-1}(x) + \lambda_{p-1} f^p(x) = 0 \implies \lambda_{p-2} = 0$ et donc finalement (*) implique $\lambda_{p-1} = 0$ d'où

$$\{f^0(x), f^1(x) + \dots, f^{p-1}(x)\}$$

est libre.

c) Si $f \in \mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$ est nilpotent d'indice n , on vu que

$$\{f^0(x), f^1(x) + \dots, f^{n-1}(x)\}$$

est un système libre, donc constitue une base de E

Soit M la matrice de f dans la base

$\{u_1, u_2, \dots, u_n\} = \{f^{n-1}(x), f^{n-2}(x) + \dots, f^0(x)\}$, alors on a

$$f(u_1) = f^n(x) = 0,$$

$$f(u_2) = f(f^{n-2}(x)) = f^{n-1}(x) = u_1,$$

\vdots

$$f(u_n) = f(f^0(x)) = f^1(x) = u_{n-1}$$

on alors

$$M(f)_{\{u_1, u_2, \dots, u_n\}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Réciproquement si f admet M comme matrice par rapport à une base, alors on vérifie que f est nilpotent d'indice n car M l'est.

2) M étant nilpotente d'indice p ; $\implies M^p = 0$

$$I - M^p = I^p - M^p = (I - M) \sum_{k=0}^{p-1} I^k M^{p-k} = (I - M) \sum_{k=0}^{p-1} M^{p-k} = I$$

Par conséquent $I - M$ est inversible et on a :

$$(I - M)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} M^{p-k}$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_4 + N$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad N^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

N est nilpotente d'indice 4.

$$A^k = (I_4 + N)^k = \sum_{j=0}^k C_k^j N^j I_4^{k-j} = C_k^0 I_4 + C_k^1 N + C_k^2 N^2 + C_k^3 N^3$$

car I_4 et N commutent (on applique la formule de binôme) et pour $j > 3$, $N^j = 0$

$$\begin{aligned} A^k &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{k(k-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{k(k-1)(k-2)}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ A^k &= \begin{bmatrix} 1 & k & \frac{k(k-1)}{2} & \frac{k(k-1)(k-2)}{6} \\ 0 & 1 & k & \frac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$