

Variables aléatoires et lois de probabilité ¹**Exercice 1**

On effectue deux tirages sans remise dans une urne contenant six boules dont trois blanches, deux rouges et une noire. Déterminer la loi de probabilité des variables X et Y représentant le nombre de boules tirées, respectivement blanches et noires.

Exercice 2

Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages avec remise jusqu'à l'obtention d'une boule noire. Si X désigne le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule noire.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ puis $Var(X)$.

Exercice 3

Le nombre de magnétoscopes vendus en une semaine dans un magasin est une variable aléatoire X dont la loi est donnée dans le tableau ci-après:

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,2	0,4		0,1

- a) Calculer $P(X = 2)$ puis $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$.
- b) Déterminer la loi de probabilité de la v.a Y représentant le nombre de magnétoscopes vendus en deux semaines consécutives puis calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $Var(Y)$.
Pouvait-on obtenir ces deux valeurs directement?

Exercice 4**Loi hypergéométrique**

- a) Une urne contient 8 boules blanches et deux boules noires. On tire sans remise (tirage exhaustif) trois de ces boules. On considère la variable aléatoire X qui est égale au nombre de boules noires tirées à l'occasion d'un tirage de 3 boules, déterminer la loi de probabilité de X .
- b) Une boîte contient 20 pièces d'équipement dont 5 sont défectueuses. On y prend au hasard un lot de 3 pièces. Quelles sont les probabilités des événements suivants :

- (i) A : " le lot a au moins une pièce mauvaise "
- (ii) B : " le lot a au moins deux pièces mauvaises ".

Exercice 5**Loi binomiale**

Un concessionnaire de voitures vend le même jour, cinq véhicules identiques à des particuliers. Sachant que la probabilité pour que ce type de voiture soit en état de rouler deux ans après est 0,8; calculer la probabilité pour:

- a) Que les cinq voitures soit en service deux années plus tard;
- b) Que les cinq voitures soient hors service deux année plus tard;
- c) Que trois voitures soient hors de service;
- d) Que deux voitures au plus soient hors de service.

Exercice 6

Une variable aléatoire X a pour densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} k(9 - x^2) & \text{si } -3 \leq x \leq +3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- a) Déterminer la constante k .
- b) Déterminer la fonction de répartition F de X .
- c) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$.
- d) Soit (X_1, X_2, \dots, X_n) un n- échantillon de X et $Z_n = \sup\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$
Déterminer la densité de probabilité g de Z_n .

¹Cours et TD : M.A. NIANG

Exercice 7

Soit f la densité définie par:

$$f(x) = \begin{cases} k e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

- a) Calculer la constante k .
- b) Soit X la variable aléatoire réelle admettant f pour densité de probabilité.
Déterminer la fonction de répartition F de X et calculer $P(X < 3)$.
- c) Calculer $\mathbb{E}(X)$.
- d) Calculer $P(5 \leq X < 7/X > 3)$

Exercice 8

La durée du processus d'atterrissage d'un avion est le temps T , mesuré en minutes, qui s'écoule depuis la prise en charge par la tour de contrôle jusqu'à l'immobilisation de l'avion sur la piste. Dans un certain aéroport, on estime que T est une variable aléatoire continue dont la densité de probabilité est la fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par:

$$f(x) = \begin{cases} t e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

- 1. Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de T .
- 2. Déterminer la fonction de répartition F de T .
- 3. Quelle est la probabilité que
 - (a) T dépasse 2 minutes ?
 - (b) T soit compris entre 45 secondes et 3 minutes ?
 - (c) T soit inférieur à 4 minutes sachant qu'il dépasse 2 minutes ?