Chapitre n°3	Les filtres analogiques	Tale Génie Electronique

Objectifs :

- Présenter les filtres et étudier leur influence sur le spectre en fréquence d'une grandeur d'entrée périodique.
- Déterminer les fonctions de transfert des filtres élémentaires et donner leur représentation en fonction de la fréquence.

Outils mathématiques :

- Utilisation des nombres complexes
- Utilisation d'une calculatrice: module et argument d'un nombre complexe, logarithmes décimaux

Introduction

I. Généralités sur le filtrage

I.1. Définition

I.2. Fonction de transfert d'un filtre (ou transmittance)

I.3. Domaines d'applications des filtres

I.4. Filtre idéal

I.5. Filtre réel : ses caractéristiques
1. Différents types de filtres
2. Comportement physique d'un filtre
3. Gain d'un filtre
4. Bande passante et fréquence de coupure
5. Représentation de la fonction de transfert

II. Filtres passe-bas

II.1. Filtre passe-bas passif TP
1. Comportement physique
2. Etude pratique
3. Observations et conclusions
4. Etude théorique et forme canonique

II.2. Filtre passe-bas actif TP
1. Comportement physique
2. Etude théorique

II.3. Quelle différence entre un filtre passif et un filtre actif ? TP

II.4. Réponse d'un filtre passe-bas à un signal périodique TP

exercices 3.11 et 3.12 p 72

III. Filtres passe-haut

III.1. Filtre passe-haut passif TP
1. Comportement physique
2. Etude théorique et forme canonique
3. Courbes de gain et de phase d'un filtre passif passe-haut
4. Influence de la charge

III.2. Remarque sur le filtre passe-haut actif

III.3. Caractéristiques d'un passe-haut et conclusion

exercice 3.13 p 72

IV. Filtres passe-bande TP

IV.1. Fonction de transfert d'un passe-bande
1. Forme canonique
2. Bande passante

IV.2. Filtre passe bande passif

IV.3. Filtre passe bande actif

IV.4. Cas d'un filtre sélectif

exercices 3.14 et 3.15 p 73

Conclusion

⇨ Vocabulaire et formes canoniques

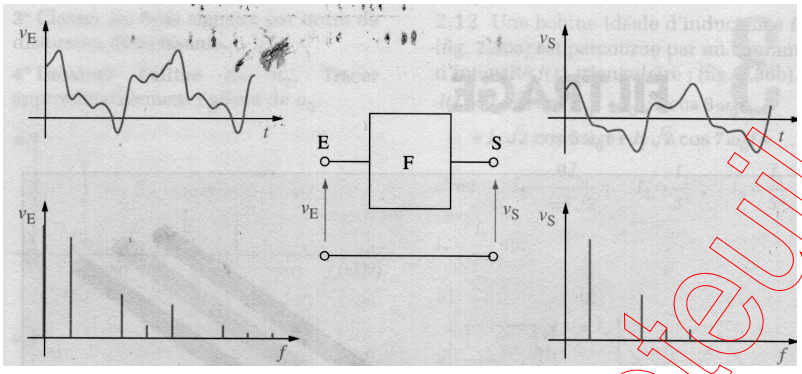
Lycée E. de Breteuil

Introduction

I. Généralités sur le filtrage

I.1. Définition

DEF **Un filtre** est un quadripôle linéaire (2 bornes d'entrées, et 2 bornes de sorties), qui ne laisse passer que les signaux compris dans un domaine de fréquence limité, appelé la bande passante du filtre.



Un filtre modifie le spectre du signal d'entrée.
↳ Il va donc déformer le signal. Il n'y a pas de création d'harmonique (si le filtre est linéaire), mais le filtre transmet, amplifie ou atténue certains harmoniques (ce qui met en évidence le phénomène de filtrage).

I.2. Fonction de transfert d'un filtre (ou transmittance)

L'étude d'un filtre se fera en régime sinusoïdal avec la notation complexe.

DEF La transmittance ou fonction de transfert d'un filtre en régime sinusoïdal est, en notation complexe, le nombre complexe $\underline{T}$ égal au rapport :

$$\underline{T} = \frac{\underline{Us}}{\underline{Ue}} = \frac{[U_s;\varphi_s]}{[U_e;\varphi_e]} = \left[\frac{U_s}{U_e};\varphi_s - \varphi_e\right] = [T;\varphi]$$

Pour étudier un filtre, nous avons recours à deux représentations graphiques constituant **le diagramme de Bode** :

- Le module de la transmittance, en fonction de la fréquence (ou de la pulsation) : T(f)
- L'argument de la transmittance, en fonction de la fréquence (ou de la pulsation) : φ(f).

Etant donné que nous étudions le comportement des filtres sur des plages de fréquences, souvent très larges, l'emploi du papier millimétré devient inadapté, c'est pourquoi nous aurons recours à du papier semi-logarithmique.

I.3. Domaines d'applications des filtres

Les filtres permettent :
- d'éliminer des parasites, des bruits
- de sélectionner une fréquence, ou une bande de fréquence.

Il existe des filtres de différentes natures: passe-bas ; passe-haut et passe bande.

Applications :
- passe-bas : extraire la valeur moyenne d'un signal (on élimine les harmoniques et on ne conserve que la composante continue voir TP) ; élimination des bruits parasites HF (pour HP par exemple), valeur moyenne sur un multimètre, capteur de vitesse…
- passe-haut : pour les tweeters d'un HP, table de mixage …
- passe-bande : medium d'un HP, récepteur radio (pour accorder la fréquence sur la station émettrice) …

Lycée E. de Breteuil

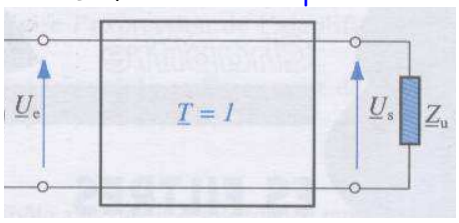
I.4. Filtre idéal

DEF **Pour qu'un filtre soit idéal**, il faudrait que la transmittance soit égale à 1, pour les fréquences comprises dans la bande passante, et qu'elle soit égale à 0, pour les autres fréquences (celles qui ne sont pas comprises dans la bande passante).

Pour les fréquences que l'on désire transmettre à la charge :

$$\left.\begin{array}{l}|\underline{T}| = 1 \\ \arg \underline{T} = 0\end{array}\right\} \underline{U_s} = \underline{U_e}$$

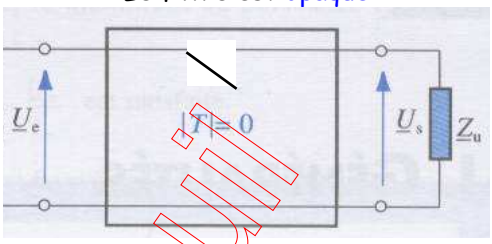
Le filtre est transparent



Pour les fréquences que l'on désire éliminer :

$$|\underline{T}| = 0 \Rightarrow \underline{U_s} = 0$$

Le filtre est opaque

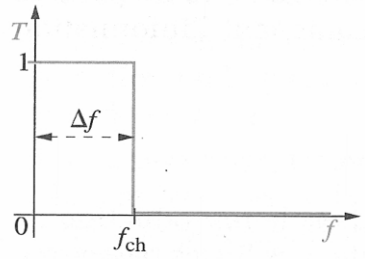
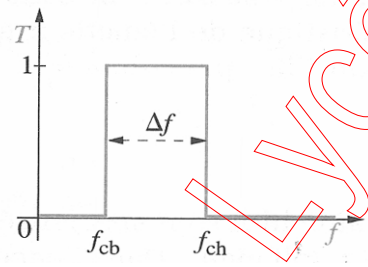
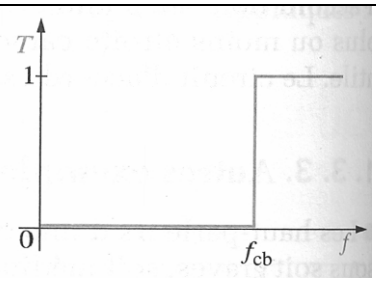
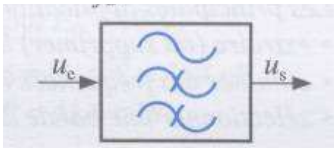


DEF **La bande passante** du filtre idéal est l'intervalle de fréquence **[f_{cb} ; f_{ch}]** pour lesquelles la transmittance est égale à 1.

- **fcb** est la fréquence de coupure basse
- **fch** est la fréquence de coupure haute.

La bande passante (ou largeur de bande passante), est égale à BP = $\Delta f = f_{Ch} - f_{Cb}$

Courbe de réponse idéale des différents filtres :

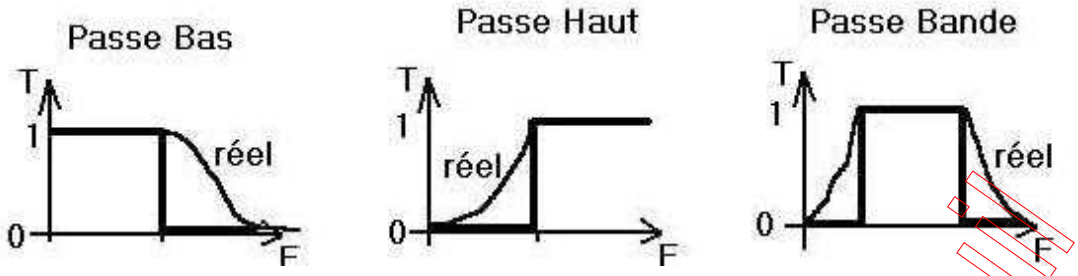
	Représentation fonction de transfert	Bande passante	Symbole
Filtre Passe Bas		Bande passante : [0 ; f_{Ch}] $\Delta f = f_{ch}$	
Filtre Passe Bande		Bande passante : [f_{cb} ; f_{ch}] $\Delta f = f_{ch} - f_{cb}$ Cas particulier : si le filtre est sélectif, il ne sélectionne « qu'une seule fréquence » Δf tend vers 0.	 Il existe aussi le filtre coupe bande (ou rejecteur de bande)
Filtre Passe Haut		Bande passante : [f_{cb} ; ∞[Δf non définie	

Lycée E. de Breteuil

I.5. Filtre réel : ses caractéristiques

Pratiquement, il est impossible de réaliser des filtres idéaux. Les filtres réels ne possèdent pas de courbe de réponse idéale, et on ne peut définir les fréquences de coupure de la même façon. *(Avec des filtres plus complexes, on se rapproche d'une fonction de transfert idéale, notion de compromis…)*

Courbes réelles



I.5.1. Différents types de filtres

DEF Un filtre passif linéaire n'est constitué que de dipôles passifs linéaires, comme la résistance, la bobine et le condensateur.

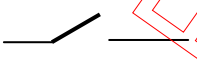
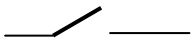
DEF Un filtre actif linéaire est constitué de dipôles passifs linéaires, et de composants actifs linéaires : transistors, amplificateurs opérationnels. Ils nécessitent donc une source d'énergie pour fonctionner.

Autres différences (avantages/inconvénients) voir II.3

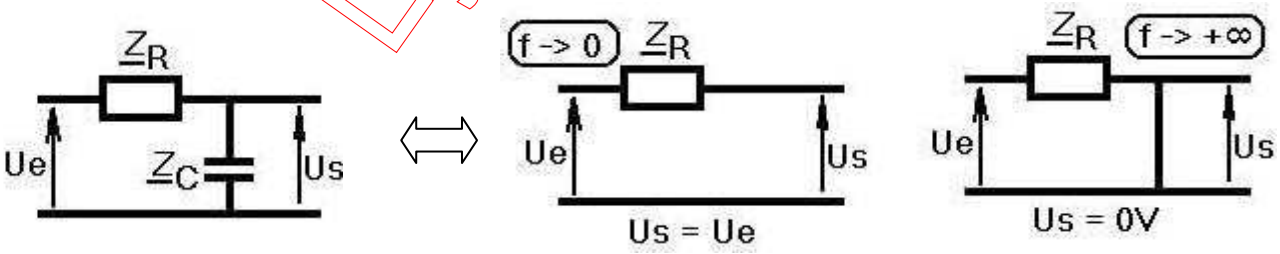
Il existe d'autres types de filtres : à capacités commutées, quartz, filtres numériques …

I.5.2. Comportement physique d'un filtre

Sans connaître la fonction de transfert d'un filtre, il est possible de déterminer sa nature (P.bas, P.haut …) en prévoyant son comportement en fréquence.

Lorsque f → 0		Lorsque f → ∞	
C ↔		C ↔	
L ↔		L ↔	

Exemple :



T ➔ 1 T ➔ 0

Nous avons donc ici un **filtre passe-bas**

Lycée E. de Breteuil

I.5.3. Gain d'un filtre

Intérêt de l'utilisation du décibel (dB)

La transmittance d'un filtre peut varier dans de très grandes proportions, et il faut pouvoir lire sur un graphique des valeurs très différentes, comme T=0,1, ou T=1000. Nous utilisons donc une échelle logarithmique et nous définissons, une grandeur, appelé **gain**.

DEF Si T, est le module de la transmittance d'un filtre, alors on note **G = 20 log T son gain.**

C'est une grandeur sans dimension, ayant pour unité le **décibel (dB)**.

Propriétés du logarithme décimal :

- La division devient différence : $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$
- La multiplication devient addition : $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$
- La fonction inverse de log x est 10^x soit ici $\boxed{T = 10^{\frac{G}{20}}}$

Exemples :

si G = 20 dB	↔	T = 10
si G = 0 dB	↔	T = 1
si G → - ∞	↔	T → 0

Attention : Le « log » est la fonction « logarithme », il ne faut pas le confondre avec son compère, le logarithme népérien.

I.5.4. Bande passante et fréquence de coupure

DEF La bande passante à -3dB, est l'intervalle de fréquences $[f_{cb} ; f_{ch}]$ pour lequel :

- le gain G du filtre est compris entre G_{Max} ($G_{Max} = G_0 = 20 \log T_{Max}$) et G_{Max} – 3dB
- ou bien, le module de la transmittance T est telle que $T \geq \frac{T_{Max}}{\sqrt{2}}$

Pour f_{cb} et f_{ch} le gain vaut donc $G = G_{Max} - 3dB$ ou bien $T = \frac{T_{Max}}{\sqrt{2}}$. (par abus de langage on parle des fréquences de coupure à – 3dB)

Correspondance G_{Max} – 3dB et $T = \frac{T_{Max}}{\sqrt{2}}$: $20\log\frac{T_{Max}}{\sqrt{2}} = 20\log T_{Max} - 20\log\sqrt{2} = G_0 - 3dB$

I.5.5. Représentation de la fonction de transfert

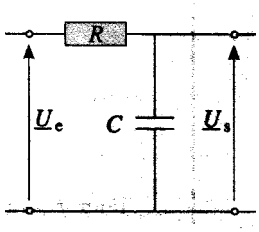
Elle dépend de la plage de fréquence concernée :

- si étroite (Passe bande sélectif), on tracera le module de la fonction de transfert T et φ avec une échelle linéaire pour la fréquence f.
- Si elle est étendue (Passe Bas, Passe Haut…) on tracera alors le gain G et φ avec une échelle logarithmique de fréquence (Diagramme de Bode)

Lycée E. de Breteuil

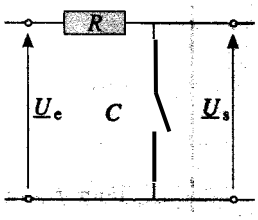
II. Filtres passe-bas

II.1. Filtre passe-bas passif à vide voir TP



II.1.1. Comportement physique

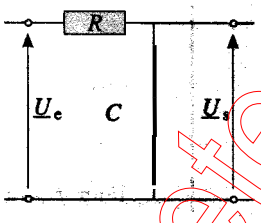
Pour f → 0, condensateur ≡



$U_s = U_e$
(I= 0 donc pas de chute de tension aux brones de R)

Et donc T = 1

Pour f → ∞, condensateur ≡



$U_s = 0$
(tension aux bornes d'un fil)

Et donc T = 0

↳ Ce filtre transmet sans atténuation les basses fréquences et supprime les hautes fréquences : il s'agit donc d'un filtre passe-bas

II.1.2. Etude pratique : tracés des courbes de gain G_{dB} et de déphasage en fonction de la fréquence f.

Voir TP 7

II.1.3. Observations et conclusions

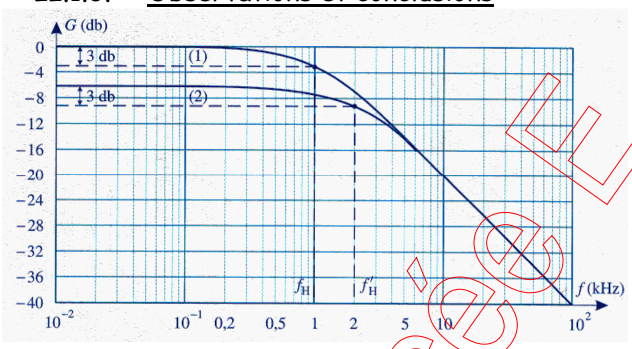


Figure n°1

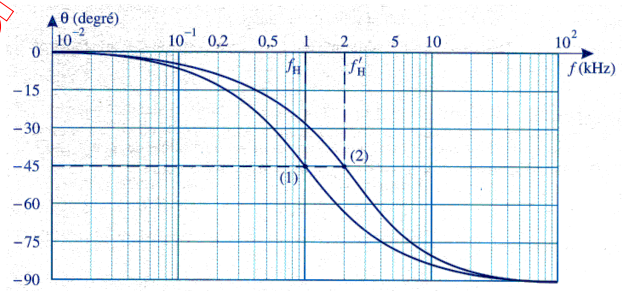


Figure n°2

(1) : filtre à vide
(2) : filtre en charge

- D'après la courbe de gain (**figure 1**)
  - ☒ Pour f << fc : le gain est nul et prend sa valeur maximale Gmax = 0
  - ☒ Pour f = fc : $G = G_0 - 3$ dB = - 3dB
  - ☒ Pour f >> fc : La courbe du gain est rectiligne de pente – 20 dB/décade atténuation de 10 lorsque la fréquence est X10

- D'après la courbe de phase : (**figure 2**)
  - ☒ Elle est toujours négative et décroît de 0 à -90°
  - ☒ Lorsque f = fc, φ = - 45°

Lycée E. de Breteuil

II.1.4. Etude théorique et forme canonique

Avec le diviseur de tension, on écrit $\underline{U_s} = \dfrac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_C} + \underline{Z_R}} \cdot \underline{U_e}$

On peut maintenant exprimer la transmittance : $\underline{T} = \dfrac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = \dfrac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_C} + \underline{Z_R}} = \dfrac{1}{1 + \underline{Z_R} \cdot \underline{Y_C}}$ soit $\underline{T} = \dfrac{1}{1 + jRC\omega}$

La **forme canonique** de la transmittance d'un filtre passe-bas du 1er ordre est $\boxed{\underline{T} = \dfrac{T_0}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_h}}}$

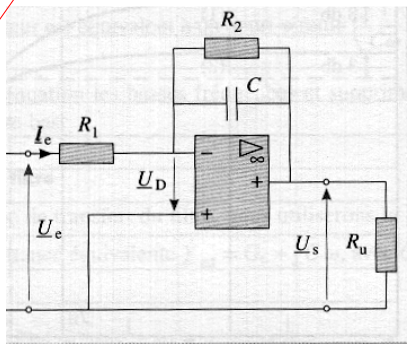
Par identification, on obtient : $\begin{cases} T_0 = 1 \\ \omega_H = \dfrac{1}{RC} \end{cases}$

- ☒ Son module : $T = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_h}\right)^2}}$
- ☒ Son argument : $\varphi = -\tan^{-1}\dfrac{\omega}{\omega_h}$

Lorsque f = f_H, $\underline{T} = \left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}; -\dfrac{\pi}{4}\right]$

Remarque : pour ce filtre en charge, (voir figure 1 et 2 + TP n°8), certaines caractéristiques du filtre sont modifiées (fréquence de coupure et donc bande passante, T_{Max})

II.2. Filtre passe-bas actif voir TP



Hypothèses de fonctionnement :
- il existe une contre réaction,

donc l'A Op fonctionne en régime linéaire.
On peut donc écrire $u_D = V^+ - V^- = 0$
- on considère l'A Op idéal et donc les courants d'entrées sont considérés négligeables $i^+ = i^- = 0$

II.2.1. Comportement physique

- lorsque f tend vers 0 : le condensateur se comporte comme un circuit ouvert

Nous avons un montage amplificateur inverseur et : $\boxed{\underline{U_s} = -\dfrac{R_2}{R_1}.\underline{U_e}}$

- f tend vers l'infini (∞) R_2 est court-circuitée donc $\underline{Us} = 0$
  - ↳ Ce filtre a donc un comportement passe-bas (**figure 3 et 4**)

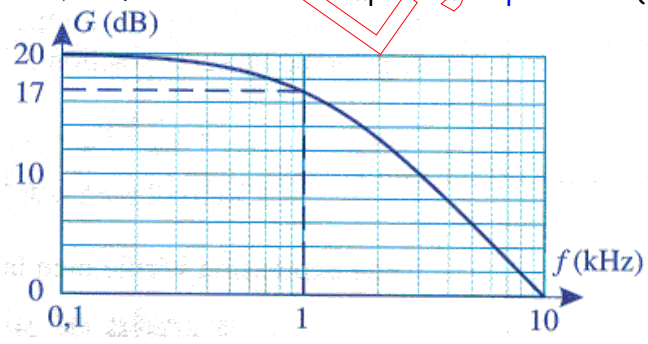


Figure n°3

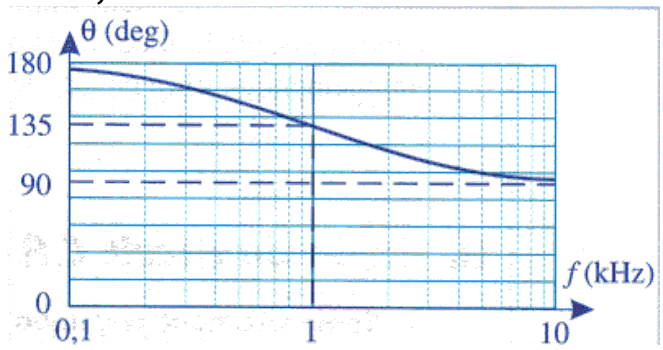


Figure n°4

Lycée L. de Bretteuil

II.2.2. Etude théorique

Si on appelle $\underline{Z_2}$ l'association parallèle de R_2 et C.

Par application du principe de superposition, on établit $\underline{V^-} = \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}\cdot\underline{U_e} + \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}\cdot\underline{U_s}$

De plus $\underline{V^+} = 0$ et puisque l'A Op fonctionne en linéaire, on obtient $\underline{V^-} = \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}\cdot\underline{U_e} + \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}\cdot\underline{U_s} = 0$

Donc $\underline{U_s} = -\frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}\cdot\frac{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}}\cdot\underline{U_e}$ et donc $\boxed{\underline{U_s} = -\frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}}\cdot\underline{U_e}}$

Nous avons à faire à un montage amplificateur inverseur :

$$\underline{T} = -\frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}} = -\frac{1}{\underline{Z_1}.\underline{Y_2}} \qquad \text{Avec} \begin{cases} \underline{Z_1} = R_1 \\ \underline{Y_2} = \frac{1}{R_2} + jC\omega \end{cases}$$

Nous avons ainsi : $\underline{T} = -\frac{1}{R_1\left(\frac{1}{R_2}+jC\omega\right)} = \frac{-\frac{R_2}{R_1}}{1+jR_2C\omega}$

Sous la **forme canonique** d'un passe-bas du 1er ordre:

$$\boxed{\underline{T} = \frac{T_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_h}}} \qquad \text{soit} \begin{cases} T_0 = -\frac{R_2}{R_1} \\ \omega_h = \frac{1}{R_2C} \end{cases}$$

Remarque : Ce filtre en charge, (voir TP n°8), présente les mêmes caractéristiques qu'à vide (f_C et BP et T_{Max})

II.3. Quelle différence entre un filtre passif et un filtre actif ? voir TP

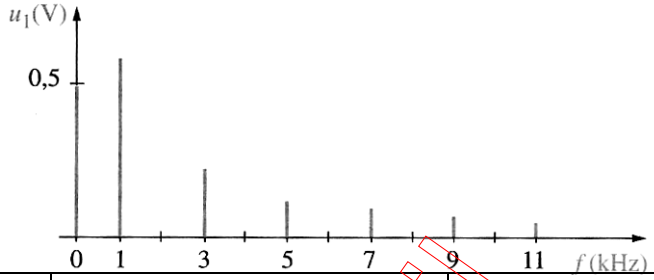
	Filtres passifs	Filtres actifs
Constitution	uniquement de **dipôles passifs linéaires** (R, L C).	un **amplificateur** différentiel intégré + et de **dipôles passifs linéaires** (R, L, C).
Différences	Le **gain max G_0** (dans la bande passante) peut être **> 0** pour un filtre actif ↳ il peut donc amplifier	La **courbe de déphasage** est décalée de π.
Points communs	Pour un filtre construit à partir d'une cellule RC, l'expression de la **fréquence de coupure** est la même $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$	On retrouve la **même pente de –20 dB/décade** au-delà de la bande passante.
Avantages	Leur **réalisation** est simple Leur **coût**	Fonction de transfert **indépendante** de la charge ↳ **mise en cascade** de filtres actifs plus facile **Amplification** possible dans la bande passante Pas d'utilisation de **bobines** (coûteuses et encombrantes) en basse fréquence
Inconvénients	leur fonction de transfert **dépend** de l'impédance de charge $\underline{Z_u}$; ↳ la **mise en cascade** de plusieurs filtres passifs est donc délicate.	**Réalisation** plus complexe (que celle d'un filtre passif) Ils nécessitent une source **d'alimentation continue** La bande passante de l'A.D.I. est **limitée**, ↳ Réalisation de filtre actif passe-haut difficile Le **niveau de tension en sortie est limité** par les tensions de l'alimentation ± V_{CC} de l'A Op.

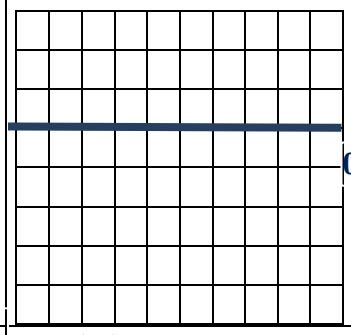
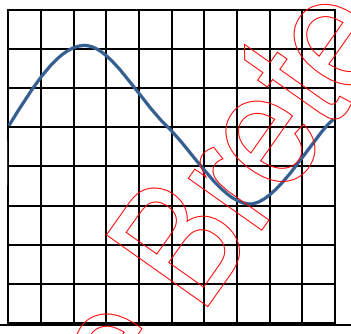
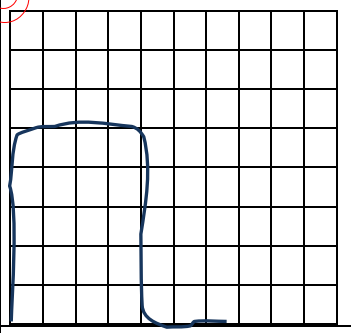
Lycée E. de Breteuil

II.4. Réponse d'un filtre passe-bas à un signal périodique voir TP

Si l'on connaît le spectre en fréquence de la tension d'entrée et la fonction de transfert du filtre, on peut déterminer le spectre en fréquence de la tension de sortie puis retrouver sa représentation temporelle.

On applique une tension créneau de fréquence f à un filtre passe-bas de fréquence de coupure fc
Rappel du spectre d'une tension créneau :

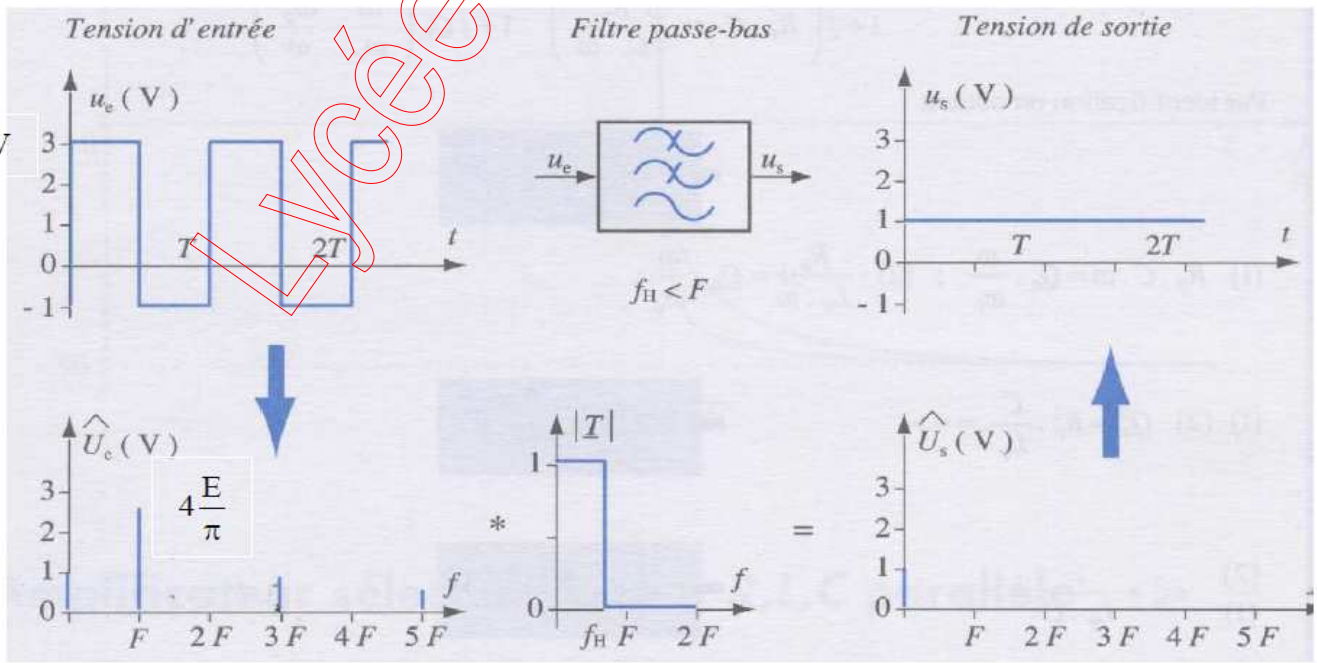


Relation entre f et f_C	f >> fc	f = fc	f << fc
Allure de $u_s(t)$			
Conclusion	Seule la composante continue est transmise : Fonctionnement en **moyenneur**	La composante continue et le fondamental sont transmis ***La tension est déformée***	Presque tous les harmoniques sont transmis ***La tension est très peu déformée***

0 V

0 V

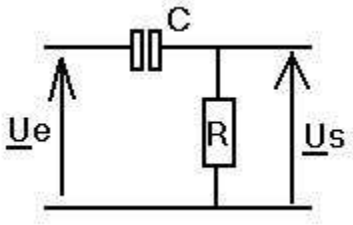
☒ Méthode : A partir du signal créneau d'entrée u_e tracé ci-dessous, on détermine l'allure de $u_s(t)$.



Lycée E. de Breteuil

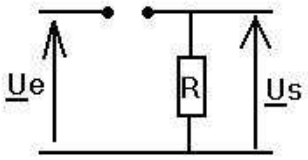
III. Filtres passe-haut

III.1. Filtre passe-haut passif voir TP



III.1.1. Comportement physique

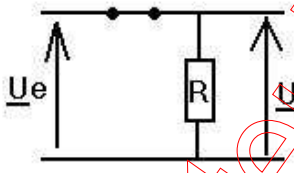
Pour f → 0, condensateur ≡ —— ——



$\underline{U_s} = 0$
(I= 0 donc pas de chute de tension aux bornes de R)

Et donc $\underline{T} = 0$

Pour f → ∞, condensateur ≡ —— ——



$\underline{U_s} = \underline{U_e}$
(tension aux bornes d'un fil = 0)

Et donc $\underline{T} = 1$

↳ Ce filtre transmet sans atténuation les fréquences élevées et supprime les fréquences basses : c'est donc un **filtre passe-haut**

III.1.2. Etude théorique et forme canonique

Avec le diviseur de tension, on écrit $\underline{U_s} = \dfrac{\underline{Z_R}}{\underline{Z_C} + \underline{Z_R}} \cdot \underline{U_e}$

On peut maintenant exprimer la transmittance : $\underline{T} = \dfrac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = \dfrac{\underline{Z_R}}{\underline{Z_C} + \underline{Z_R}} = \dfrac{1}{1 + \underline{Y_R} \cdot \underline{Z_C}}$ soit $\underline{T} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{jRC\omega}}$

La **forme canonique** de la transmittance d'un filtre passe-haut du 1er ordre est $\boxed{\underline{T} = \dfrac{T_0}{1 + \dfrac{\omega_0}{j\omega}}}$ ou $\boxed{\underline{T} = \dfrac{T_0}{1 - j\dfrac{\omega_0}{\omega}}}$

Par identification, on obtient : $\begin{cases} T_0 = 1 \\ \omega_0 = \dfrac{1}{RC} \end{cases}$

(ω_0 est la pulsation de coupure basse encore notée ω_b ou ω_{cb})

☒ Son module : $T = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$

☒ Son argument : $\varphi = \tan^{-1}\dfrac{\omega_0}{\omega}$

III.1.3. Courbes de gain et de phase d'un filtre passif passe-haut

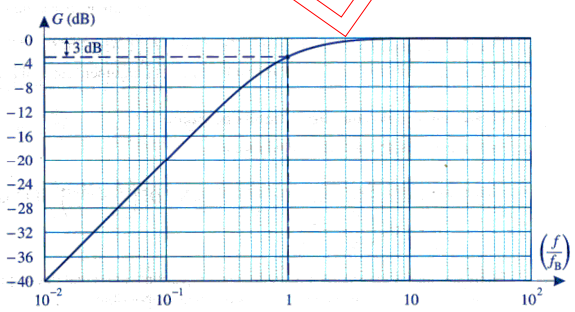


Figure n°5

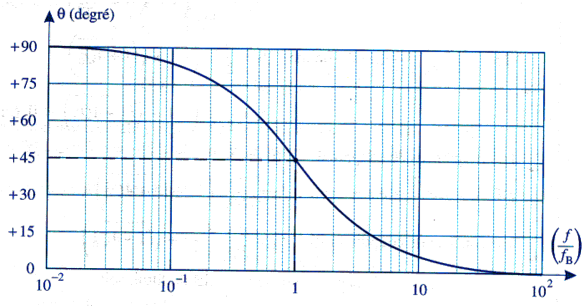


Figure n°6

Lycée E. de Breteuil

III.1.4. Influence de la charge

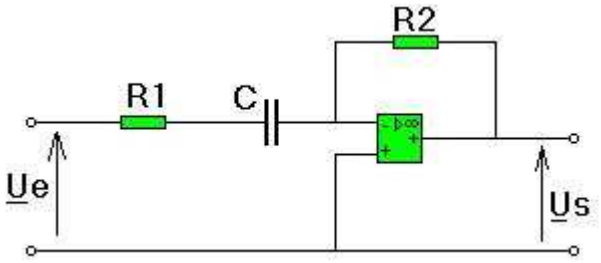
On charge le filtre par une résistance R_u.

On appelle R_{eq} l'association parallèle de R et R_u, on applique le pont diviseur de tension avec $R_{eq} = \frac{R.R_u}{R+R_u}$

Conclusion : le gain maximal reste inchangé : $G_{Max} = 0$

Seule la fréquence de coupure est changée $f_{cb} = \frac{1}{2\pi R_{eq}.C}$

III.2. Remarque sur le filtre passe-haut actif



En pratique, il est assez difficile de réaliser un filtre actif passe haut car l'élément amplificateur possède lui-même une bande passante limitée

III.3. Caractéristiques d'un filtre passe-haut passif

- D'après la courbe de gain (**figure 5**)
  - ☒ Pour f >> fc : le gain est nul ($T_{Max} = 1$) et prend sa valeur maximale $G_{Max} = 0$ pour les hautes fréquences
  - ☒ Pour f = fc : $G = G_0 - 3$ dB = - 3dB et $T(f_0) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\frac{\pi}{4}\right]$
  - ☒ Pour f << fc : La courbe du gain est rectiligne de pente + 20 dB/décade
    Amplification de 10 lorsque la fréquence est X10
    La transmittance T est << 1

- D'après la courbe de phase : (**figure 6**)
  - ☒ Elle est toujours positive et croît de 0 à +90°
  - ☒ Lorsque f = fc, φ = + 45°

Lycée E de Breteuil

IV. Filtres passe-bande voir TP

IV.1. Fonction de transfert d'un passe-bande

IV.1.1. Forme canonique

Elle s'exprime sous la forme : $$\underline{T} = \frac{T_0}{1 + jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Autre expression : $$\underline{T} = \frac{T_0}{1 + jQ_0\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)}$$

Avec
- T_0 : nombre réel > 0 ou < 0
- Q_0 : nombre réel > 0
- ω_0 : pulsation centrale du filtre

Remarque : pour la fréquence $f = f_0$ ($\omega = \omega_0$), on a : $\underline{T} = [|T_0| ; arg(T_0)]$, avec T_0 valeur maximale de $|\underline{T}|$

Avec $arg(T_0) = 0$ *si* $T_0 > 0$

$arg(T_0) = \pi$ *si* $T_0 < 0$

IV.1.2. Bande passante

On cherche des valeurs particulières ω, notées ω_1 et ω_2, telles que $T = \frac{|T_0|}{\sqrt{1 + Q_0^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{|T_0|}{\sqrt{2}}$

Soit encore, ω_1 et ω_2, telles que $Q_0^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 1$

on obtient donc deux équations du 2nd degré :

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = -\frac{1}{Q_0}$$

$$\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q_0}\cdot\omega - \omega_0^2 = 0$$

On détermine alors le discriminent

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q_0}\right)^2 + 4\cdot\omega_0^2$$

On a alors deux racines dont une seule est positive

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q_0}\left(-1 + \sqrt{1 + 4Q_0^2}\right) > 0 \\ \omega_1' = \frac{\omega_0}{2Q_0}\left(-1 - \sqrt{1 + 4Q_0^2}\right) < 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = +\frac{1}{Q_0}$$

$$\omega^2 - \frac{\omega_0}{Q_0}\cdot\omega - \omega_0^2 = 0$$

On détermine alors le discriminent

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q_0}\right)^2 + 4\cdot\omega_0^2$$

On a alors deux racines dont une seule est positive

$$\begin{cases} \omega_2 = \frac{\omega_0}{2Q_0}\left(1 + \sqrt{1 + 4Q_0^2}\right) > 0 \\ \omega_2' = \frac{\omega_0}{2Q_0}\left(1 - \sqrt{1 + 4Q_0^2}\right) < 0 \end{cases}$$

Et donc deux fréquences de coupure $$\begin{cases} f_b = \frac{f_0}{2Q_0}\left(-1 + \sqrt{1 + 4Q_0^2}\right) \\ f_h = \frac{f_0}{2Q_0}\left(1 + \sqrt{1 + 4Q_0^2}\right) \end{cases}$$

$$\Delta f = f_h - f_b = \frac{f_0}{2Q_0}\left(1 + \sqrt{1 + 4Q_0^2} - (-1) - \sqrt{1 + 4Q_0^2}\right)$$

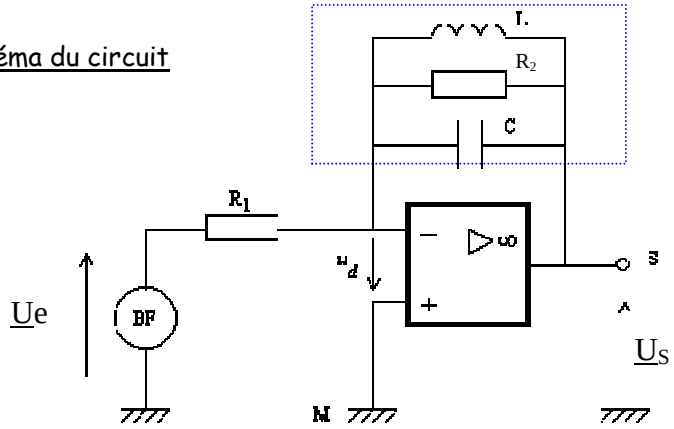
Et la bande passante à – 3dB d'un filtre passe-bande, s'exprime donc $\Delta f = f_h - f_b = \frac{f_0}{Q_0}$

Le facteur de qualité Q_0 caractérise la sélectivité du filtre (voir § IV.4).

Lycée E. de Breteuil

IV.2. Filtre passe bande actif

IV.3.1. Schéma du circuit



Avec $\underline{Y_2}$ l'admittance équivalente à R_2, L et C en parallèle

IV.3.2. Etude de la transmittance

En reprenant le début de la démonstration faire pour le filtre passe-bas actif…

Nous avons à faire à un montage amplificateur inverseur :

$$\underline{T} = -\frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}} = -\frac{1}{\underline{Z_1}.\underline{Y_2}} \qquad \text{Avec} \begin{cases} \underline{Z_1} = R_1 \\ \underline{Y_2} = \frac{1}{R_2} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right) \end{cases}$$

En notant $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ la pulsation de résonance du circuit RLC parallèle,

On va écrire $\underline{Y_2}$ sous la forme $\underline{Y_2} = \frac{1}{R_2}\left[1 + jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]$

$\underline{Y_2} = \frac{1}{R_2} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$ donne $\underline{Y_2} = \frac{1}{R_2} + jC\omega_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{LC\omega_0\omega}\right)$. Avec $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, on obtient

$\underline{Y_2} = \frac{1}{R_2} + jC\omega_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$ soit encore $\underline{Y_2} = \frac{1}{R_2}\left[1 + jR_2C\omega_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]$

Et si on appelle $Q_0 = R_2C\,\omega_0$ (ou encore $Q_0 = \frac{R_2}{L\omega_0}$), on obtient $\underline{Y_2} = \frac{1}{R_2}\left[1 + jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]$.

$\underline{T}$ s'écrit alors $\underline{T} = \frac{-1}{R_1 \cdot \frac{1}{R_2}\left[1 + jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]} = \frac{-\frac{R_2}{R_1}}{1 + jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$

et donc sous sa forme canonique $\boxed{\underline{T} = \frac{T_0}{1 + jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}}$ avec par identification $\begin{cases} T_0 = -\frac{R_2}{R_1} \\ Q_0 = R_2C\omega = \frac{R_2}{L\omega} \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{cases}$

Valeurs particulières de $\underline{T}$:

☒ à la résonance $\omega = \omega_0$, le module T de $\underline{T}$ est maximal $\underline{T} = \left[\frac{R_2}{R_1}; \pi\right]$

☒ En basses fréquences : $\underline{T} = \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$

☒ En hautes fréquences : $\underline{T} = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Lycée E. de Breteuil

IV.3. Cas d'un filtre passe-bande sélectif

IV.4.1. Définition

DEF

Un filtre sélectif est un filtre passe-bande pour lequel la bande passante Δf est très faible par rapport à la fréquence d'accord f_0.

$$\Delta f = f_H - f_B = \frac{f_0}{Q_0} \quad \text{avec} \quad \frac{f_0}{Q_0} \ll f_0 \quad \text{soit} \quad Q_0 \gg 1$$

Exemples d'utilisation des filtres et amplificateur sélectifs:

- émetteurs/récepteurs (radio, TV …)
- analyseurs de spectre

IV.4.2. Fréquences de coupures et bande passante.

Avec $Q_0 \gg 1$ et donc $\Delta f \ll f_0$, les fréquences de coupure s'expriment ainsi :

Fréquence de coupure haute :

$$f_h = f_0 + \frac{f_0}{2Q_0} = f_0 + \frac{\Delta f}{2}$$

Fréquence de coupure basse :

$$f_b = f_0 - \frac{f_0}{2Q_0} = f_0 - \frac{\Delta f}{2}$$

IV.4.3. Représentation de la fonction de transfert

Puisque la plage de fréquence est réduite, on trace **le module T** et l'argument φ de la transmittance T avec une **échelle linéaire de fréquence**.

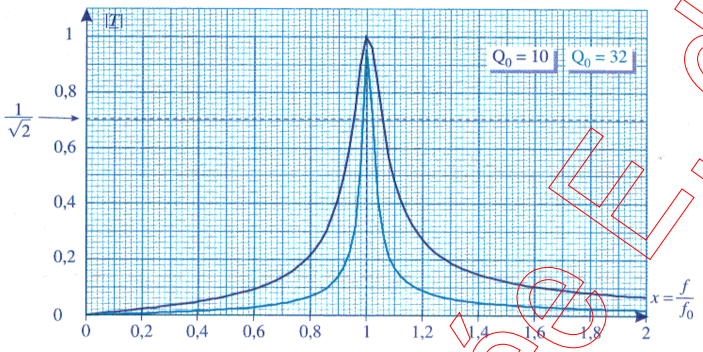


Figure n°8

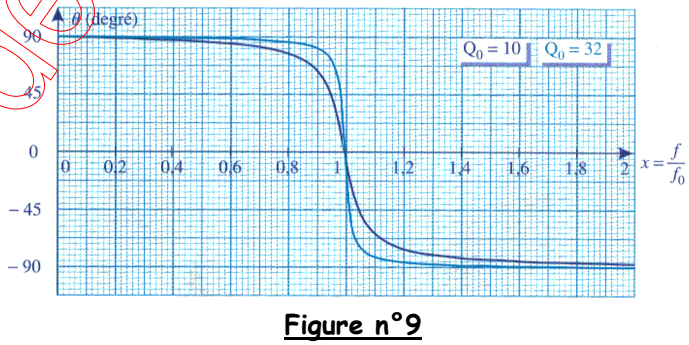


Figure n°9

Conclusion :

☒ Le vocabulaire (définition d'un filtre, bande passante, différence filtre actif et passif…)

☒ Les formes canoniques

Filtre passe-bas	Filtre passe-haut	Filtre passe-bande
$\underline{T} = \frac{T_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$	$\underline{T} = \frac{T_0}{1 - j\frac{\omega_0}{\omega}}$	$\underline{T} = \frac{T_0}{1 + jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$

Lycée E. de Breteuil

Ce que vous devez savoir :

1. **Dessiner le diagramme idéalisé T(f)** du module de la fonction de transfert, d'un filtre passe-bas, d'un filtre passe-haut, d'un filtre passe-bande.
2. Citer la différence entre un **filtre passif et un filtre actif**.
3. **Définir** le **gain** d'un filtre, citer **l'unité de gain**.
4. **Définir** la **fréquence de coupure à – 3dB** pour un filtre réel, **la bande passante** (par un graphique ou une formule).
5. **Citer un exemple** de filtre passif de chaque sorte : passe-bas, passe-haut, passe-bande.
6. **Citer une application** des filtres passe-bas, passe-haut, passe-bande.
7. Dans le cas d'un filtre passe-bande (RLC) : **citer la relation** entre la fréquence du maximum, la bande passante à -3dB et le facteur de qualité.

Ce que vous devez savoir faire :

1. Effectuer une **première analyse qualitative** du comportement d'un filtre, dont le schéma est fourni, sans passer par l'expression de sa faction de transfert.

2. **Etablir l'expression de la fonction de transfert** et en déduire le **gain en dB et l'argument**, pour les filtres suivants :
   - ❑ Passe-bas et passe-haut du 1^er ordre
   - ❑ Passe-bande à circuit RLC parallèle.

3. Dans le cas d'un filtre passe-bande : **Etablir** l'expression de la **fréquence du maximum**.
4. Utiliser une **échelle linéaire et logarithmique** pour tracer la fonction de transfert d'un filtre.
5. Déterminer, par le calcul ou par utilisation d'un graphe, les **amplitudes des composantes spectrales** d'un signal périodique à la sortie d'un filtre.

Lycée E. de Breteuil

Annexe: le décibel vu par un radioamateur

Pourquoi utiliser des décibel ?

Revenons sur l'acoustique est essayons de mesurer le rapport entre le plus fort signal auditif supportable par un être humain et le plus faible. Le bruit est dû à une onde de pression. La pression la plus faible entendue par une oreille humaine se situe vers 20.10^{-6} Pa.
Le signal le plus fort et encore supportable avoisine les 200 000 000 10^{-6} Pa.
Si nous calculons le ratio du signal le plus fort sur le plus faible, nous obtenons un rapport de 10 000 000, avouez que ce n'est guère commode à manipuler. Si nous calculons le Log de ce rapport nous trouvons R = 7 ce qui revient à dire que ce rapport est égal à **7 Bel**

D'où vient le décibel ?

Nous venons de voir avec l'exemple précèdent que 7 Bel représentent un rapport de 100 000 000. Le bel est une "grosse" unité, il est bien plus commode de mesurer avec une unité plus fine comme le décibel qui est le 10ème du Bel. Dans notre exemple notre rapport serait de 70 dB, c'est mieux non ?

Les décibels et la radio :

Nous avons souvent, en radioélectricité des écarts comme celui cité en exemple concernant l'oreille humaine. Prenez le plus petit signal perceptible par un récepteur et le plus fort, l'écart est encore plus important. Nous avons également besoin de quantifier les gains et les atténuations et il est plus commode de parler d'un amplificateur de 20 dB de gain que d'un amplificateur qui amplifie 100 fois. Nous avons également besoin de pouvoir ajouter ou soustraire des gains et des atténuations, avec le dB c'est ultra simple car les logarithmes ont cette merveilleuse propriété de pouvoir transformer les multiplications en additions et les divisions en soustractions. Nous avons besoin de pouvoir donner un niveau de puissance par rapport à une référence fixe, le décibel par rapport au Watt ou mW le permet. Vous l'aurez compris cette unité endémique de la radio est indispensable.

Extrait : site « Traité d'électricité et d'électronique pour le radioamateur »
(http://perso.wanadoo.fr/f6crp/elec