

CHAPITRE II : STATIQUE DES FLUIDES

Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude des fluides au repos. Les lois et théorèmes fondamentaux en statique des fluides y sont énoncés. La notion de pression, le théorème de Pascal, le principe d'Archimède et la relation fondamentale de l'hydrostatique seront étudiés.

Le calcul des presses hydrauliques, la détermination de la distribution de la pression dans un réservoir, un barrage, un sous-marin...etc., sont basés sur les lois et théorèmes fondamentaux de la statique des fluides. Les ingénieurs doivent calculer les forces exercées par les fluides avant de concevoir de telles structures.

I. Considérations Générales

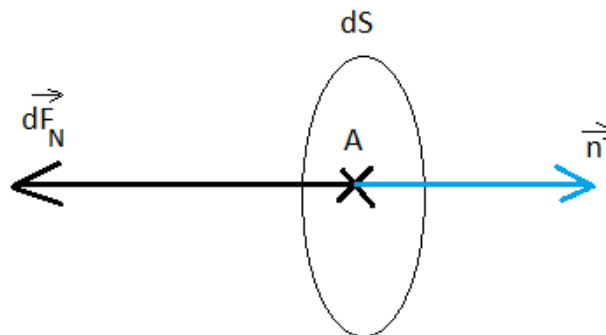
I.1. Repère

Nous repérerons un point de l'espace contenu dans un milieu fluide à l'aide d'un trièdre trirectangle direct dont l'axe Oz sera vertical orienté vers le haut. Cet axe sera dit axe des côtes. Les côtes seront mesurées par rapport à un plan de référence horizontal généralement celui du niveau de la mer. Nous pourrions néanmoins faire un changement d'origine.

I.2. Les différentes pressions

I.2.1. Pression statique absolue

Soit A un point d'un milieu fluide entouré d'une surface élémentaire dS .



Le fluide exerce sur la surface dS une force dF . La tension en point est matérialisée par la pression.

$$P_A = \frac{|d\vec{F}_N|}{dS}$$

où :

dS : Surface élémentaire de la facette de centre A (en mètre carré),

n : Vecteur unitaire en A de la normale extérieure à la surface,

dF_N : Composante normale de la force élémentaire de pression qui s'exerce sur la surface (en Newton),

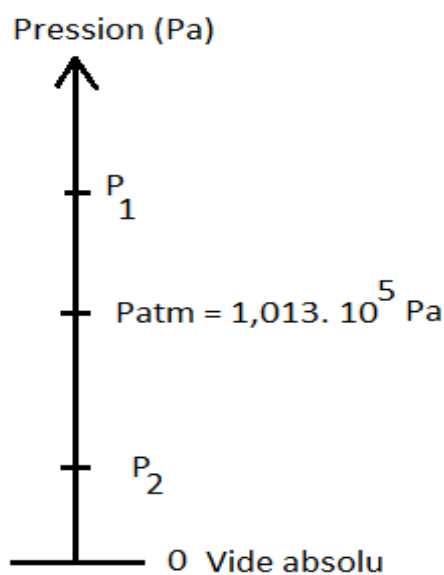
P_A : pression statique absolue en A (en Pascal),

Sur la surface de centre A, d'aire dS , orientée par sa normale extérieure $\vec{n}$, la force de pression élémentaire $d\vec{F}$ s'exprime par :

$$d\vec{F}_N = -P_A dS \vec{n}$$

NB : la pression statique absolue est une grandeur essentiellement positive nulle à la limite et exprimée en Pascal (Pa).

II.2.2. Pression effective ou relative (ou manométrique)



Sur cette échelle de pression, la pression atmosphérique est située à $1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Comme c'est la pression qui nous entoure, nous pouvons faire un changement pour amener l'origine en P_{atm} .

Nous pourrions alors définir les pressions effectives ou relatives ($P_1 - P_{\text{atm}}$) et ($P_2 - P_{\text{atm}}$).

Nous pouvons remarquer que P_2 est bien positive mais la pression effective ($P_2 - P_{\text{atm}}$) est négative.

- ($P_1 - P_{\text{atm}}$) > 0 on est en surpression
- ($P_2 - P_{\text{atm}}$) < 0 on est en dépression

I.2.3. Pression en mètre de fluide

C'est la pression $\frac{P}{\rho g}$ avec ρ la masse volumique et g l'accélération de la pesanteur.

Exemple $\frac{P_{\text{atm}}}{\rho g} = \frac{10^5}{10^3 \cdot 10} = 10 \text{ m d'eau}$

I.2.4. Pression piézométrique ou motrice

Elle est donnée par cette relation en considérant les hypothèses suivantes :

- Nous sommes uniquement dans le champ de la pesanteur $g = \text{cte}$
- Le fluide est incompressible ou isovolume $\rho = \text{cte}$

$$\hat{P} = P + \rho g z$$

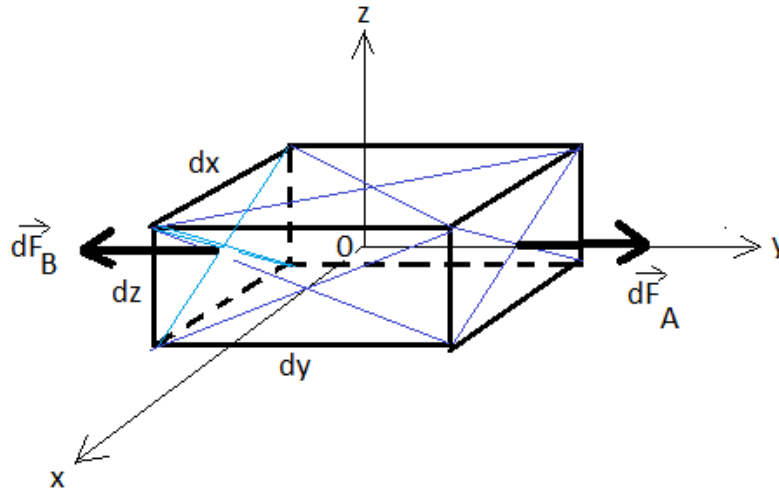
P : pression statique

ρ : la masse volumique

g : accélération de la pesanteur

.....
z : cote du point considéré

I.2.5. Force de pression



Considérons un parallélépipède élémentaire de surface de cotés dx , dy , dz et cherchons la valeur des forces de pression (force sur les axes) suivant les trois axes. Le parallélépipède élémentaire est centré à l'origine des axes.

Evaluons la force de pression selon l'axe Oy ; soit S_A la surface entourant le point A et S_B celle entourant le point B.

La force de pression sur S_A vaut : $-P\left(0, \frac{dy}{2}, 0\right) dx dz$

La force de pression sur S_B vaut : $-P\left(0, -\frac{dy}{2}, 0\right) dx dz$

Selon Oy alors, nous obtenons : $-\left\{P\left(0, \frac{dy}{2}, 0\right) - P\left(0, -\frac{dy}{2}, 0\right)\right\} dx dz = -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy dz$

En faisant de même pour les autres axes :

$$\begin{cases} d\vec{F}_x = -\frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz \\ d\vec{F}_y = -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy dz \\ d\vec{F}_z = -\frac{\partial P}{\partial z} dx dy dz \end{cases}$$

D'où $d\vec{F} = -\text{grad}P \cdot d\tau$

Autre méthode utilisant le théorème de Green Ostograshi

$$d\vec{F} = -Pd\vec{S}\vec{n}$$

$$\vec{F} = \iiint_S -Pd\vec{S}\vec{n} = \iiint_\tau -\text{grad}P \cdot d\tau$$

On en déduit en dérivant cette équation, on obtient l'expression de l'élément de force.

I.3. Définitions

I.3.1. Surface de niveau ou équipotentielle

C'est l'ensemble des points soumis à la même pression statique

$$\hat{P} = P + \rho g z = \text{cte et } P = \text{cte}$$

C'est l'ensemble des plans horizontaux $z = \text{cte}$

I.3.2. Surface libre

C'est la surface de séparation d'un liquide à l'atmosphère, sur cette surface $P = P_{\text{atm}}$

I.3.3. Dimensions et unités des pressions

$$[P] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$$

L'unité légale ou du système internationale SI est le Pascal

$$1 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa et } 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ kg/cm}^2.$$

II. Statique des fluides incompressibles

II.1 Equation de la statique

Le but est connaître qu'elle sera l'action d'un fluide sur les parois du réservoir qui le contient ou de l'obstacle qui l'arrête. Si nous appliquons la loi fondamentale de la dynamique à la statique, nous obtenons :

$$\rho \vec{\gamma} = \sum \text{forces extérieures} = \text{Force de volume} + \text{forces de surface} + \text{force de frottement}$$

$\gamma = 0$ fluide statique

Force de volume = poids du fluide = $\rho \vec{f}$

Forces de surface ou de pression = $-\text{grad}P$

Forces de frottement = 0 car le fluide est statique

D'où l'équation :

$$\rho \vec{f} - \text{grad}P = 0$$

où $\vec{f}$ représente la densité massique des forces de volume. Cette relation constitue l'équation générale de la statique des fluides.

II.2. Hydrostatique

Si le fluide est uniquement soumis au champ de la pesanteur, nous pouvons écrire que le champ $\vec{f}$ dérive d'un potentiel.

$$\vec{f} = -\text{grad}\Phi, \text{ avec } \phi = gz$$

L'équation devient : $-\rho \text{grad}gz - \text{grad}P = 0$

« Deuxième hypothèse » : le fluide est incompressible $\rho = \text{cte}$

L'expression devient $-\text{grad}(P + \rho gz) = 0$

En calculons cette expression on constate qu'elle ne dépend que de z ce qui permet d'arriver à la relation suivante :

$$P + \rho gz = \text{Constante}$$

On appelle cette constante la pression piézométrique ou motrice $\hat{P}$ elle représente l'énergie potentielle de l'unité de volume de fluide dans le champ de gravité.

L'accélération de la pesanteur g correspond à la résultante de la force d'attraction terrestre et de la force centrifuge d'inertie due à la rotation intrinsèque de la planète. On considérant que la Terre est de densité constante ($d = 5,52$), l'accélération de pesanteur peut s'exprimer par la relation:

$$g = g_0(1 - 0,002644 \cos(2\varphi) - 3,15 \cdot 10^{-7} z)$$

où φ est la latitude du lieu, z est l'altitude exprimée en mètres et $g_0 = 9,80619 \text{ m.s}^{-2}$.

Ainsi, au niveau du "sol", g varie de $9,78 \text{ m.s}^{-2}$ à l'équateur à $9,83 \text{ m.s}^{-2}$ aux pôles.

Le plus souvent, on prendra $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ dans les applications courantes.

La relation $\hat{P} = P + \rho gz = \text{cte}$ est valable pour un fluide incompressible et placé uniquement dans le champ de la pesanteur. Ce qui veut dire qu'en tout point d'un fluide au repos, la pression piézométrique est constante. Pour chercher la constante, nous passerons par un point où nous connaissons la pression statique.

II.2.1. Théorème de Pascal

Dans un fluide incompressible en équilibre, toute variation de pression en un point entraîne la même variation de pression en tout autre point.

Démonstration

Supposons qu'au point G_1 intervienne une variation de pression telle que celle-ci devienne $P_1 + \Delta P_1$; ΔP_1 étant un nombre algébrique. Calculons la variation de pression ΔP_2 qui en résulte en G_2 .

Appliquons la relation fondamentale de l'hydrostatique entre G_1 et G_2 pour le fluide :

- A l'état initial $P_1 - P_2 = \rho g (z_2 - z_1)$
- A l'état final $(P_1 + \Delta P_1) - (P_2 + \Delta P_2) = \rho g (z_2 - z_1)$

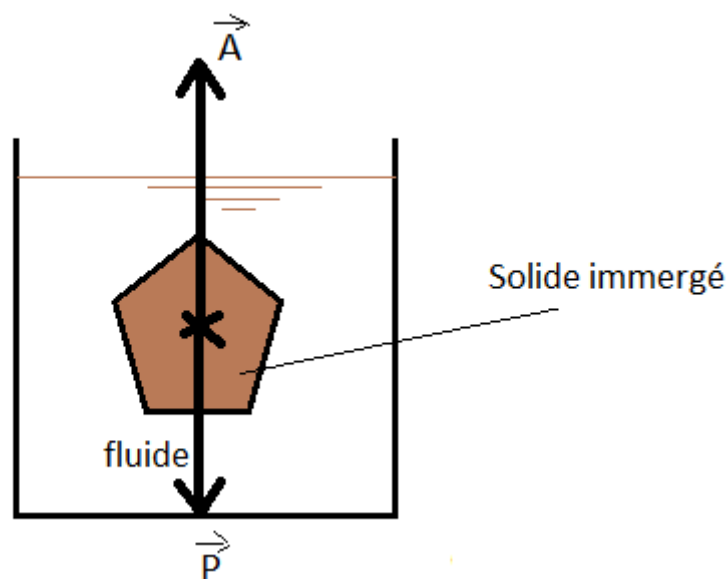
En faisant la différence des deux équations, on obtient :

$$\Delta P_1 - \Delta P_2 = 0 \text{ c\`ad } \Delta P_1 = \Delta P_2$$

II.2.2. Théorème d'Archimède.

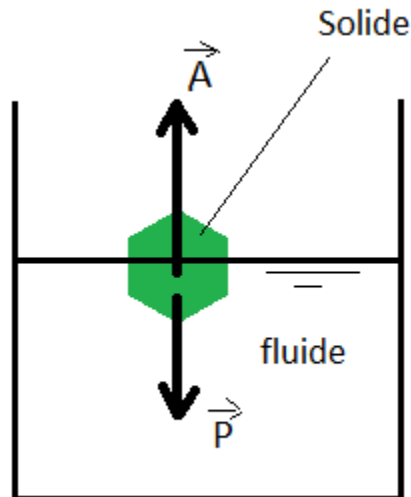
Tout corps plongé dans un fluide reçoit de la part de ce fluide une force (poussée) verticale, vers le haut dont l'intensité est égale au poids du volume de fluide déplacé (ce volume est donc égal au volume immergé du corps).

$$A = \rho_{\text{liquide}} \cdot V_{\text{imm}} \cdot g$$



Si le système de fluides se réduit à un fluide unique, de masse volumique ρ est constante, et si le solide est complètement immergé, le centre de poussée coïncide avec le centre d'inertie du corps. $P = Mg = \rho_{\text{solide}} \cdot V_{\text{solide}} \cdot g$

Si le corps est immergé dans plusieurs fluides, comme c'est le cas d'un flotteur dont la partie inférieure est dans un liquide et la partie supérieure dans un gaz (mais aussi dans le cas d'un liquide stratifié en densité), le théorème reste applicable, mais le centre de poussée n'a pas une position invariable par rapport un repère lié au solide. La résultante des pressions exercées par le liquide et par le gaz (ou à chaque niveau pour un fluide stratifié) est appliquée au barycentre du volume (le centre de poussée).



Pour que le flotteur soit en équilibre, c'est à dire pour qu'il flotte, il faut que la poussée d'Archimède soit égale en intensité au poids du flotteur. Or le poids du flotteur vaut $m_{\text{flotteur}} \cdot g$. On aura donc :

$$m_f \cdot g = \rho_l \cdot g \cdot V_{\text{imm}}.$$

En remplaçant m_f par $\rho_f \cdot V_f$, on obtient :

$$\rho_f \cdot g \cdot V_f = \rho_l \cdot g \cdot V_{\text{imm}}.$$

Le volume immergé V_{imm} est toujours plus petit que le volume total du flotteur V_{flotteur} . Par conséquent, pour que la précédente relation soit satisfaite et que le flotteur flotte, il faut que la masse volumique du liquide soit plus faible que celle du liquide.

$$\rho_{\text{flotteur}} < \rho_{\text{liquide}}$$

On pourra encore écrire cette condition avec les densités :

$$d_{\text{flotteur}} < d_{\text{liquide}}$$

La glace, dont la densité est d'environ 0,9 flottera donc sur l'eau (densité de 1). Les icebergs en sont un exemple. Par contre, le granit de densité 1,6 environ, coulera dans l'eau. Le granit flottera toutefois sur le mercure (densité de 13,6).

Cas des fluides non miscibles – exemple du pèse acide

Certains liquides sont dits *immiscibles*. Ceci signifie que même en les agitant fortement, ils ne se mélangent pas et après un certain temps, on obtient deux phases liquides qui se superposent. C'est le liquide qui a la densité la plus faible qu'on retrouvera toujours au-dessus.

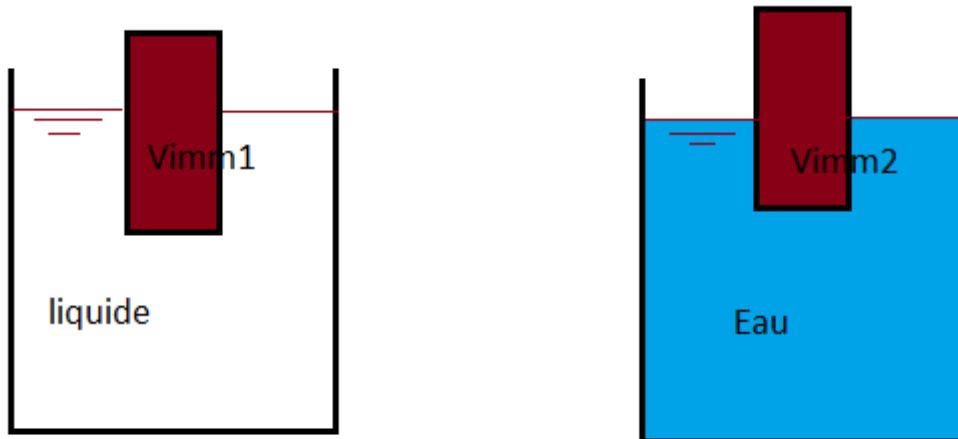
Par exemple, le pétrole de densité 0,87 flotte sur l'eau de mer de densité 1,02. C'est la raison pour laquelle lors de marées noires, le pétrole déversé surnage à la surface de l'eau sous forme de nappes (ce qui permet d'ailleurs de le récupérer).

Exemple du pèse acide

Nous avons vu que la valeur du volume immergé du flotteur dépendait de la masse volumique du liquide. Il est par conséquent possible de mesurer des masses volumiques de liquide en mesurant ce volume immergé. C'est le principe du *pèse-acide* (utilisé pour mesurer la densité du liquide de batterie automobile par exemple) ou du *pèse-alcool* (utilisé pour mesurer la densité d'une solution aqueuse d'alcool éthylique comme un spiritueux par exemple).

On constate que le flotteur de volume V_f et de masse volumique ρ_f s'enfonce dans l'eau d'un volume V_{imm1} alors qu'il s'enfonce d'un volume V_{imm2} dans un liquide dont on désire mesurer la masse volumique ρ_{liq} .

Dans chacun des cas on peut écrire la condition d'équilibre du flotteur à l'aide de l'équation. On obtient ainsi :



$$\rho_{eau} \cdot g \cdot V_{imm1} = \rho_f \cdot g \cdot V_f$$

$$\rho_{liq} \cdot g \cdot V_{imm2} = \rho_f \cdot g \cdot V_f$$

On a donc :

$$\rho_{eau} \cdot g \cdot V_{imm1} = \rho_{liq} \cdot g \cdot V_{imm2}$$

D'où :

$$\rho_{liq} V_{imm2} = \rho_{eau} \cdot V_{imm1}$$

La masse volumique de l'eau étant connue, il suffit alors de mesurer les deux volumes immergés pour connaître la masse volumique du liquide.

II.2.3. Poussée d'un fluide sur une surface solide

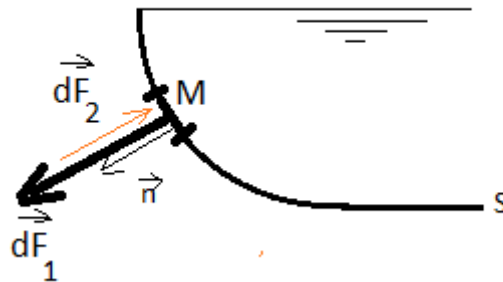
Connaissant la pression effective ($P - P_{atm}$) en un point M d'une surface solide, nous connaissons la force élémentaire de pression dF agissant sur la surface dS entourant ce point M par : $dF = (P - P_{atm}) \cdot dS$.

- Par une sommation de la surface solide S , nous obtiendrons la force F , qui représente l'action du fluide sur cette surface.

- Par une équation des moments, nous obtiendrons le point d'application de cette force appelé **centre de poussée**.

Si la surface S est plane une seule sommation et une seule équation des moments nous donnerons les résultats cherchés. Si la surface S est gauche, il faudra raisonner sur les composantes.

II.2.3.a. Force due à la pression



Soit un point M d'un fluide à la pression statique P et entouré d'une surface élémentaire dS de normale extérieure $\vec{n}$. Le fluide exerce sur la surface dS d'une force élémentaire dF1 telle que:

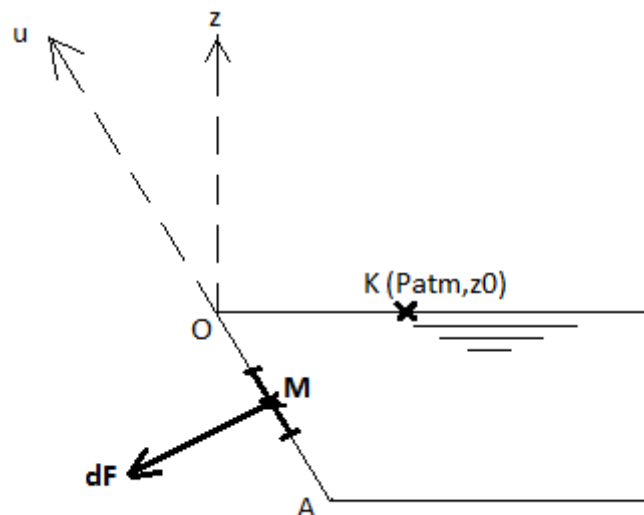
$$d\vec{F}_1 = P.dS\vec{n}.$$

Du côté de l'atmosphère il s'exercera une force dF2 telle que : $d\vec{F}_2 = Patm.dS(-\vec{n})$.

La force élémentaire de pression sur la surface dS sera donc :

$$d\vec{F} = d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2 \text{ soit } d\vec{F} = (P - Patm).dS.\vec{n}$$

II.2.3.b. Surface plane



Le réservoir dessiné contient un fluide de masse volumique ρ et nous voulons connaître l'action du fluide sur la surface OA en module, direction sens et position.

- Module

Fixons l'origine de l'axe z en O. soit M un point courant de la surface OA entouré d'une surface dS ; utilisons la conservation de la pression piézométrique entre K et M.

$$P_K + \rho g z_K = P_M + \rho g z$$

Avec $P_K = P_{atm}$, $z_K = 0$; P_M et z_M variable (P, z)

Nous obtenons $P_{atm} = P + \rho g z$

Il s'exerce sur la surface dS entourant le point M une action $d\vec{F}$ perpendiculairement et de module : $dF = (P - P_{atm}) dS = -\rho g z dS$

Comme toutes les forces ont la même direction perpendiculairement à OA, nous pouvons faire la sommation directement :

$$F = \iint_{SOA} dF = \iint_{SOA} (P - P_{atm}) dS = \iint_{SOA} -\rho g z dS$$

Le fluide est isovolume $\rho = \text{cte}$ et l'accélération $g = \text{cte}$

$$F = -\rho g \iint_{SOA} z dS$$

Coordonnée du barycentre G d'une surface homogène S

$$X_G = \frac{1}{S} \iint_S x dS \quad Y_G = \frac{1}{S} \iint_S y dS \quad Z_G = \frac{1}{S} \iint_S z dS$$

Donc $F = -\rho g Z_G S_{OA}$

Z_G cote du centre de gravité de la surface OA.

- Position

Nous chercherons le point d'application de la force, ou centre de poussée en écrivant une équation de moment, qui est une équation vectorielle.

$$\prod_{/O} \vec{F} = \iint_S \prod_{/O} d\vec{F}$$

Soit Q le point d'application de la force qui est situé en les points O et A sur l'axe $\mathbf{u}$.

$$O\vec{Q} \wedge \vec{F} = \iint_S O\vec{M} \wedge d\vec{F} \rightarrow U_Q \cdot F = \iint_{SOA} u \cdot dF \text{ donnant ainsi :}$$

$$U_Q (-\rho g Z_G) S_{OA} = \iint_{OA} u (-\rho g z) dS$$

Sachant que nous avons $z = u \cdot \sin \alpha$ en plus $dS = L du$ avec L largeur de la plaque supposé rectangulaire. $du = \frac{dz}{\sin \alpha}$ et $S = OA \cdot L$

Les calculs conduisent à ses résultats :

$$U_Q = \frac{L \iint_S z^2 dz}{Z_G \cdot OA \cdot \sin^2(\alpha)}$$

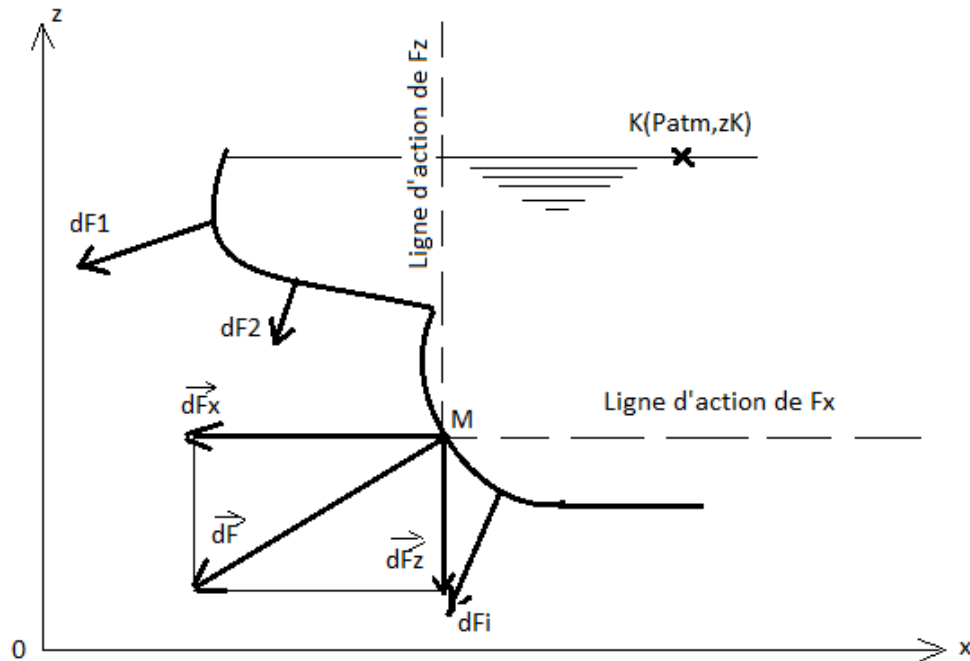
Qu'on peut écrire sous la forme :

$$U_Q = \frac{I_{/OO'}}{Z_G.OA.\sin^2(\alpha)} \text{ Avec } I_{/OO'} \text{ moment d'inertie par rapport à l'axe } OO'$$

Ce résultat dépend du choix de l'origine.

II.2.3.c. Surface gauche ou courbe

La surface gauche représentée retient un fluide de masse volumique ρ et nous voulons connaître l'action de ce fluide sur cette surface.



Remarques :

“La composante horizontale de la force de pression sur une surface quelconque (S) est égale à la poussée qui s’exercerait sur la projection verticale de (S)”.

“La composante verticale de la force de pression sur une surface quelconque (S) est égale au poids de la colonne verticale de liquide limitée par la surface (S) et la surface libre”.

Conséquence immédiate: *“La composante verticale de la résultante des forces de pression exercées par un liquide au repos sur les parois d’un récipient est égale au poids du liquide”.*

- Module

Nous allons procéder de la manière en écrivant l’égalité des pressions piézométriques aux points K et M afin d’avoir l’expression de la force élémentaire de pression dF.

Comme toutes les forces élémentaires de pression non pas la même direction, nous ne pouvons pas faire la sommation directement, donc il faut faire une projection sur les axes et faire la somme des projections.

$$F_x = \iint_S dF_x \quad F_y = \iint_S dF_y \text{ (si le problème n'est pas plan)} \quad F_z = \iint_S dF_z$$

- Position

Nous procéderons de la manière suivante :

- Une équation de moment nous donne la ligne d'action F_x
- Une équation de moment nous donne la ligne d'action F_z

Remarque : la méthode exposée est simplifiée (plus en accord avec la mécanique des fluides) on peut passer par la méthode la plus globale, le but sera d'évaluer le torseur résultant des forces de pression $d\vec{F}$ réduit au point O.

Module

$$(\tau_{\text{formé}})_O = \begin{cases} \vec{F} = \iint_S d\vec{F} \\ \Pi_{/O} = \iint_S O\vec{M} \wedge d\vec{F} \end{cases}$$

- Si S est plane $\vec{n} = \text{cte}$

$$\vec{F} = \vec{n} \iint_S (P - P_{\text{atm}}) dS$$

- Si S est gauche

$$\vec{F} = \iint_S (P - P_{\text{atm}}) d\vec{S}$$

Position

$$\Pi_{/Q} = \Pi_{/O} + Q\vec{O} \wedge \vec{F}$$

Comme

$$\Pi/Q = 0 \text{ il restera } \Pi_{/O} = O\vec{Q} \wedge \vec{F}$$

II.2.3.d. Applications

1. Surface plane : barrage vertical
2. Surface gauche : Abreuvoir en quart de cercle

II.3. Fluides en équilibre pseudo-statique

Les exemples présentés ici sont, en toute logique, des problèmes de “dynamique” dans la mesure où le fluide se déplace par rapport à un système d'axes fixes. En fait, ces problèmes peuvent être résolus dans un système d'axes qui se déplace à la même vitesse (linéaire ou angulaire) que le fluide (mouvement solide).

I.3.1. Fluide soumis à une accélération constante

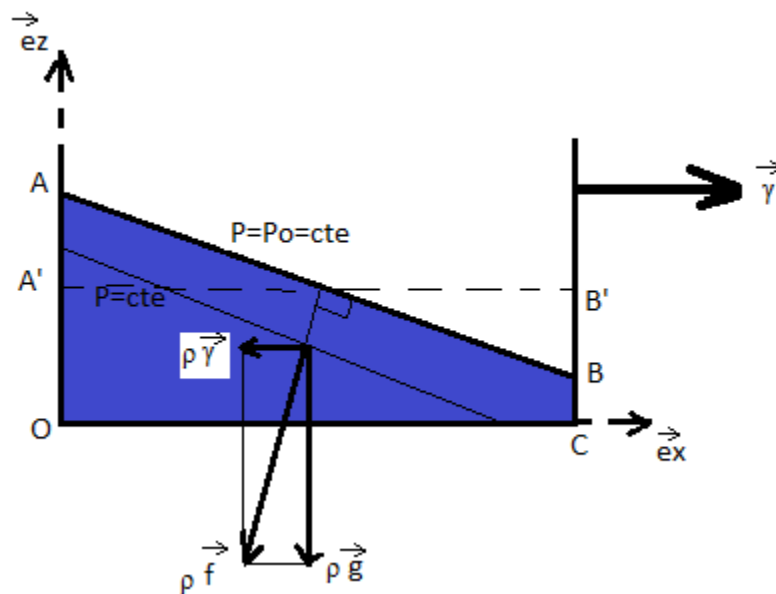
Soit un réservoir contenant un liquide et se déplace suivant l'axe horizontal Ox de manière uniformément accélérée. Il subit donc selon Ox une accélération constante γ .

Le fluide est soumis par unité de volume à l'accélération de la pesanteur verticale $\rho \vec{g}$ et la force d'inertie $\rho \vec{\gamma}$ dirigée vers les x négatifs. La composition de ces deux forces donne la résultante $\rho \vec{f}$ qui sera perpendiculaire aux surfaces d'égales pressions ou surfaces équipotentiels.

Dans ce cas, la densité volumique des forces est la somme de l'accélération de pesanteur et de la force d'inertie: $\rho \vec{f} = \rho \vec{g} - \rho \vec{\gamma} = \text{grad} P$.

Les surfaces isobares sont perpendiculaires aux lignes du champ $(\vec{g} - \vec{\gamma})$. L'équilibre s'écrit en projection:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho \gamma ; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$



Les surfaces isobares sont fournies par l'intégration de :

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial z} dz = 0 \quad \text{soit}$$

$$z = -\frac{\gamma}{g} x + Cte$$

Pour déterminer la constante on peut utiliser la conservation du volume : $V_{\text{initial}} = V_{\text{final}}$.

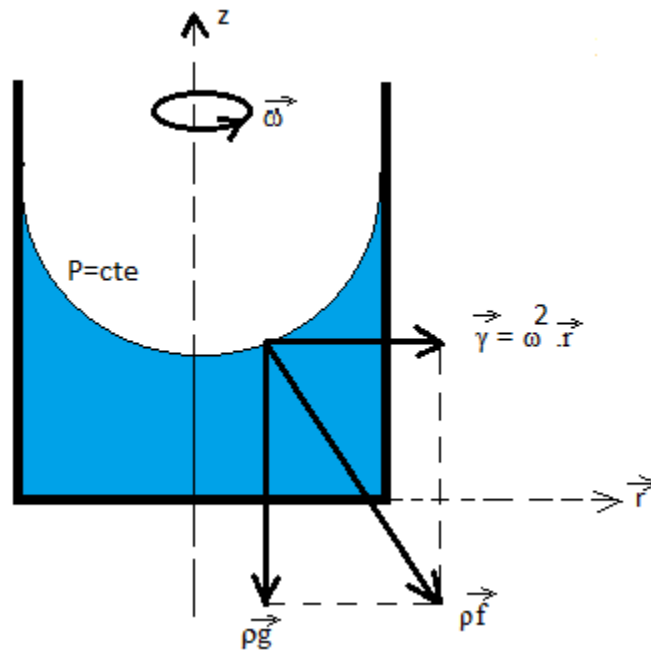
II.3.2. Fluide soumis en mouvement de rotation

On considère, dans le champ de pesanteur, un réservoir cylindrique en rotation de vitesse constante ω et partiellement rempli d'un liquide de masse volumique ρ . En réaction à l'accélération centripète d'entraînement, le fluide est soumis à l'accélération centrifuge.

$$\vec{\gamma} = \omega \vec{r} = +\text{grad} \left(\frac{\omega^2 r^2}{2} \right)$$

La projection de l'équation d'équilibre sur les axes d'un repère cylindrique tournant à la vitesse ω donne:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial r} = \rho \omega^2 r \\ \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \end{cases}$$



Les surfaces isobares sont fournies par l'intégration de :

$$dP = \frac{\partial P}{\partial r} dr + \frac{\partial P}{\partial z} dz \text{ soit } P = \frac{\rho \omega^2}{2} r^2 - \rho g z + Cte \quad z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + Cte$$

Les surfaces isobares sont donc des paraboles de révolution d'axe $\mathbf{e}_z$ orthogonales aux lignes du champ $\vec{f} = \vec{g} + \omega^2 \mathbf{r}$. Avec $V_\theta = r\omega$, il vient

$$\left(P + \rho g z - \frac{\rho V_\theta^2}{2} \right) = cte$$

qui constitue une forme tronquée de l'équation de Bernoulli pour l'équilibre pseudo-statique d'un fluide en mouvement solide relatif.

Pour déterminer la constante on peut utiliser la conservation du volume : $V_{initial} = V_{final}$.

III. Statique des fluides compressibles.

III.1. Coefficient de compressibilité isotherme

En toute généralité, dans un fluide incompressible, la masse volumique est une fonction d'au moins deux variables d'état la pression et la température: $\rho = \rho(P, T)$.

Si le fluide subit une transformation infiniment petite isotherme ($T = \text{cte}$) la pression, le volume et la masse volumique subissent des transformations infiniment petites et ils deviennent :

$$P + dP ; V + dV ; \rho + d\rho$$

Nous définissons un coefficient de compressibilité isotherme χ_θ par la relation : $\frac{dV}{V} = \chi_\theta dP$

En plus nous avons : $\frac{d\rho}{\rho} = -\chi_\theta dP$

III.2. Nouvelle équation de la statique des fluides compressibles

En partant de l'équation fondamentale projetée sur les axes, nous avons :

$$\begin{cases} -\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ -\rho g - \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{dP}{dz} + \rho g = 0$$

Pour pouvoir intégrer, il faut connaître la loi de variation de ρ qui dépend de l'état du fluide.

III.2.1. Cas des liquides

Les liquides peuvent effectivement être considérés très faiblement, voir incompressibles par

exemple pour l'eau nous avons $\chi_\theta = \frac{1}{25.10^9} \text{ m}^2 / \text{N}$ et pour le mercure $\chi_\theta = \frac{1}{25,6.10^9} \text{ m}^2 / \text{N}$

De plus χ_θ reste constant vis-à-vis de la pression.

$$\frac{d\rho}{\rho} = \chi_\theta dP$$

En supposant que ρ_0 correspond à P_{atm} , nous aurons après intégration :

$$[\ln \rho]_{\rho_0}^{\rho} = \chi_\theta [P]_{P_{\text{atm}}}^P \rightarrow \ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) = \chi_\theta (P - P_{\text{atm}}) \rightarrow \frac{\rho}{\rho_0} = e^{\chi_\theta (P - P_{\text{atm}})}$$

Comme est très petit, nous pouvons faire un développement limité de l'expo au voisinage de zéro et au premier ordre.

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 + \chi_\theta (P - P_{\text{atm}})$$

En remplaçant dans l'équation de la statique, nous obtenons :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho_0 g [1 + \chi_\theta (P - P_{atm})]$$

$$\int_{P_{atm}}^P \frac{dP}{1 + \chi_\theta (P - P_{atm})} = \int_{z_0}^z -\rho_0 g dz \Rightarrow \left[\frac{1}{\chi_\theta} \ln(1 + \chi_\theta (P - P_{atm})) \right]_{P_{atm}}^P = -\rho_0 g [z]_{z_0}^z$$

Si nous considérons $z_0 = 0$, il devient :

$$\frac{1}{\chi_\theta} [\ln(1 + \chi_\theta (P - P_{atm})) - \ln 1] = -\rho_0 g z$$

$$1 + \chi_\theta (P - P_{atm}) = e^{-\chi_\theta \rho_0 g z} \Leftrightarrow P - P_{atm} = \frac{1}{\chi_\theta} \left(e^{-\chi_\theta \rho_0 g z} - 1 \right)$$

En faisant un développement en série de l'exponentielle arrêté au premier ordre, nous avons :

$$P - P_{atm} = \frac{1}{\chi_\theta} \left[1 - \chi_\theta \rho_0 g z + \frac{(-\chi_\theta \rho_0 g z)^2}{2} - \dots - 1 \right] = \rho_0 g z \left[1 - \frac{\chi_\theta \rho_0 g z}{2} + \dots \right]$$

$$P - P_{atm} = -\rho_0 g z \left[1 - \frac{\chi_\theta \rho_0 g z}{2} \right]$$

Lorsque nous disons que la pression à 5000m de profondeur dans l'eau correspond à 5000m d'eau, ceci veut dire que nous avons négligeons la faible compressibilité du fluide et que nous considérons g équivalent à 10 ms^{-2} . Regardons qu'elle est la pression véritable en conservant la même valeur pour g .

$$\frac{P - P_{atm}}{\rho_0 g} = -(-5000) \left[1 - \frac{\frac{1}{2.10^9} \cdot 1000 \cdot 10 \cdot (-5000)}{2} \right] = 5062 \text{ m d'eau}$$

III.2.2. Cas des gaz

A la différence des liquides les gaz sont très compressibles en fonction de la température et de

la pression. Nous avons toujours l'équation : $\frac{dP}{dz} + \rho g = 0$

$$\text{Or } \begin{cases} \frac{P}{\rho} = rT \\ \frac{P_0}{\rho_0} = rT_0 \end{cases} \text{ à l'altitude } z \text{ et } z_0 \rightarrow \rho = \rho_0 \frac{P}{P_0} \frac{T_0}{T} \text{ En remplaçant dans l'équation :}$$

$$\frac{dP}{dz} = -\rho_0 g \frac{P}{P_0} \frac{T_0}{T} \Rightarrow \frac{dP}{dz} = -\frac{\rho_0 g}{P_0} \frac{T_0}{T} dz$$

III.2.2.a. Transformation isotherme d'un gaz parfait

Nous avons $PV = Cte \Rightarrow \frac{P}{\rho} = C$ ou encore $P = C\rho$

$$\frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} \quad \text{d'où} \quad \chi_\theta = \frac{1}{P} \text{ car } \frac{d\rho}{\rho} = \chi_\theta dP$$

Si l'atmosphère est à température constante, il nous reste :

$$\frac{dP}{P} = -\frac{\rho_0 g}{P_0} dz \text{ si de plus } P = P_0 \text{ pour } z = z_0 \text{ en intégrant, nous obtenons :}$$

$$P = P_0 e^{-\frac{\rho_0 g}{P_0} z} \text{ en supposant l'accélération de la pesanteur constante, nous trouverons}$$

aisément :

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\rho_0 g}{P_0} z}$$

III.2.2.b. Transformation polytropique d'un GP

La loi de variation polytropique d'un GP est donnée par :

$$PV^k = rT = Cte \text{ en transformation isotherme}$$

Trouvons tout d'abord la nouvelle expression du coefficient de compressibilité isotherme χ_θ .

$$\frac{P}{\rho^k} = Cte = a \Rightarrow a\rho^k = P \Rightarrow dP = ak\rho^{k-1}d\rho$$

$$d\rho = \frac{dP}{ak\rho^{k-1}} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dP}{ak\rho^k} = \frac{dP}{ka\rho^k} = \frac{dP}{kP} \Rightarrow \chi_\theta = \frac{1}{kP}$$

Supposons maintenant qu'un tel gaz évolue dans une atmosphère de température variable.

$$\text{Le gaz est parfait, nous avons : } \frac{PV}{T} = Cte \text{ ou } \frac{P}{\rho T} = Cte$$

$$\text{La transformation est polytropique : } PV^k = Cte \text{ ou } \frac{P}{\rho^k} = Cte$$

En faisant le rapport des deux expressions, nous éliminons la pression et obtenons :

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{k-1} = \frac{T}{T_0}$$

En élevant à la puissance k la première expression et en faisant le rapport, nous éliminons ρ et arrivons à :

$$\left(\frac{P}{P_0}\right)^{k-1} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^k$$

Éliminons maintenant la température entre les 2 dernières expressions :

$$\left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{1}{k}} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)$$

Trouvons les expressions de la pression de la température et de la masse volumique en fonction de l'altitude z.

Partons de l'expression : $\frac{dP}{P} = -\frac{\rho_0 g T_0}{P_0 T} dz$ en remplaçant $\frac{T_0}{T}$ en fonction de f (P, P₀).

$$\frac{dP}{P} = -\frac{\rho_0 g}{P_0} \left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{k-1}{k}} dz \Leftrightarrow \frac{dP}{P} \cdot P^{\frac{k-1}{k}} = -\frac{\rho_0 g}{P_0} P_0^{\frac{k-1}{k}} dz$$

$$\frac{dP}{P^{1/k}} = -\frac{\rho_0 g}{P_0^{1/k}} dz \quad P = P_0 \text{ à } z = z_0 = 0$$

$$\int_{P_0}^P P^{-\frac{1}{k}} dP = -\frac{\rho_0 g}{P_0^{1/k}} \int_0^z dz \Leftrightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{k}} \left[P^{1-\frac{1}{k}} \right]_{P_0}^P = -\frac{\rho_0 g}{P_0^{1/k}} [z]_0^z$$

$$P = P_0 \left(1 - \frac{k-1}{k} \frac{\rho_0 g}{P_0} z \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

Pour la température et la pression on utilise la relation : $\left(\frac{P}{P_0}\right)^{k-1} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^k$

$$T = T_0 \left(1 - \frac{k-1}{k} \frac{\rho_0 g}{P_0} z \right)$$

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{k-1}{k} \frac{\rho_0 g}{P_0} z \right)^{\frac{1}{k-1}}$$

III.3. Notion sur l'atmosphère

Tous les calculs faits précédemment montrent que l'atmosphère a des caractéristiques essentiellement variables aux quelles il faut ajouter les vents et les courants. Or les performances des avions en vol dépendent des conditions atmosphériques. En effet la Potence et la Trainée, forces aux quelles est soumis tout corps solide se déplaçant dans un fluide, dépendent de la masse volumique ρ du fluide qui varie évidemment en fonction de la température et de la pression.

Si le pilote connaît les performances de l'avion dans une atmosphère dite standard, il pourra choisir son itinéraire en fonction des conditions météorologiques pour que ces performances soient les meilleurs possibles.

L'atmosphère standard a été définie comme suit :

- Accélération de la pesanteur constante et égale à sa valeur à Paris.
- A l'altitude zéro, au niveau de la mer, la pression statique est normale et égale à 760mmHg et la température est $\theta=15^{\circ}\text{C}$ et la masse volumique de l'air est de $\rho_0=1,225\text{kg.m}^{-3}$.
- Pour z variant de 0 à 11 000 km, dans la couche appelée troposphère, la température décroît linéairement selon la loi :

$$\theta = 15 - 0,0065z \text{ avec } \theta \text{ en degré Celsius et } z \text{ en mètre ou bien}$$

$$T = 288(1 - 2,26.10^{-6}z) \text{ avec } T \text{ en Kelvin et } z \text{ en mètre}$$

Au-delà de 11 000 m la température reste constante et égale à $-56,5^{\circ}\text{C}$ (216,5 K).

Les 9/10 de la masse atmosphérique sont dans les 20 premiers km. Les différentes zones de l'atmosphère sont :

- 0 à 11 km la troposphère
- 11 à 80 km la Stratosphère
- 80 à 750 km l'ionosphère
- > 750 km exosphère.