

Chapitre 3 : Filtrés passifs

I. Présentation des filtres

1. Rôle d'un filtre

Un filtre est un quadripôle linéaire qui ne laisse passer que les signaux compris dans un domaine de fréquence limité appelé bande passante du filtre. Il permet d'éliminer des fréquences parasites indésirables ou d'isoler dans un signal complexe le ou les fréquences utiles.

Applications : systèmes de télécommunications, système d'acquisition et de traitement des signaux.

2. Différents types de filtres

Ils sont classés en deux grandes familles : analogique et numérique.

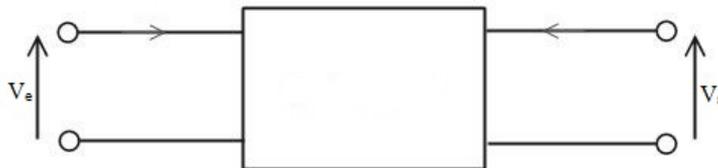
Les filtres analogiques se subdivisent en plusieurs catégories :

- Les filtres passifs constitués de dipôles passifs linéaire (résistances, condensateurs, bobines)
- Les filtres actifs constitués de dipôles passifs linéaires et de composants actifs linéaires (transistors, amplificateurs opérationnels)

II. Théorie du filtrage

1. Fonction de transfert ou transmittance d'un quadripôle linéaire

Le comportement d'un filtre est défini par l'étude fréquentielle de la fonction de transfert entre la tension de sortie et la tension d'entrée.



V_e : tension d'entrée

V_s : tension de sortie

En régime sinusoïdal, la fonction de transfert est définie par :

$$H(j\omega) = \frac{V_s(t)}{V_e(t)} \Leftrightarrow H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e}$$

$$\underline{H} = \frac{\left| \frac{V_s}{V_e} \right| \angle \varphi_s}{\left| \frac{V_e}{V_e} \right| \angle \varphi_e} = \left| \frac{V_s}{V_e} \right| \angle \varphi_s \cdot \varphi_e = G \angle \varphi$$

$$G = \left| \frac{V_s}{V_e} \right| : \text{norme du gain de tension}$$

φ : argument de la fonction de transfert

2. Fonction d'atténuation

Dès fois on préfère définir un filtre par rapport à l'atténuation qu'il amène sur la grandeur d'entrée.

$$A(j\omega) = \frac{1}{H(j\omega)} = \frac{V_e}{V_s}$$

Remarque : un filtre passif dissipe toujours de l'énergie et la puissance disponible à la sortie est toujours inférieure à la puissance d'entrée.

3. Gain d'un quadripôle linéaire

Il s'exprime en décibels (dB). Le gain en tension est défini par :

$$G_{dB} = 20 \log_{10} G(\omega)$$

Remarque :

Gain en puissance $P_{dB} = 10 \log P(\omega)$

4. Fréquence de coupure

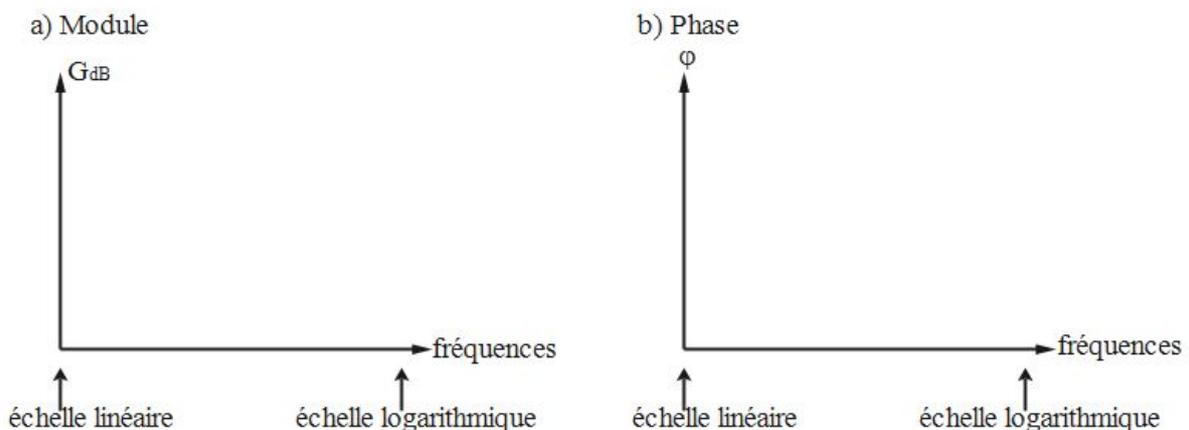
La fréquence de coupure ω_c d'un système est la fréquence pour laquelle le gain maximum en tension est divisé par $\sqrt{2}$.

$$G(\omega_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$$

5. Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode de la fonction de transfert $H(j\omega)$ est constitué de deux courbes en représentation semi-logarithmique.

$$G = |H(j\omega)| \quad \text{et} \quad \varphi = \arg[H(j\omega)]$$



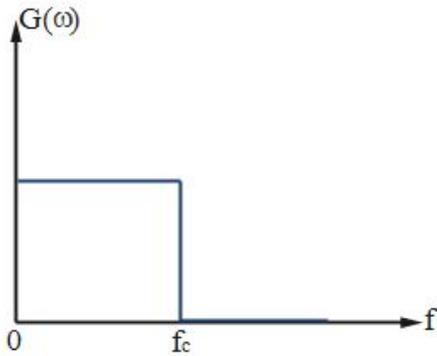
Dans une échelle logarithmique, une octave est l'écart entre X et $2X$ et decade est l'écart entre X et $10X$.

6. Principaux filtres idéaux

Un filtre idéal présente :

- Un affaiblissement nul dans la bande de fréquence que l'on désire concevoir (bande passante)
- Un affaiblissement infini dans la bande que l'on désire éliminer (bande atténuée).

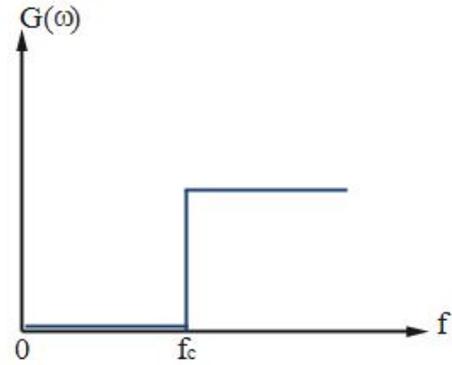
a) Filtre passe-bas



Bande passante $[0 ; f_c]$

Ce filtre ne laisse passer que les basses fréquences du signal d'entrée.

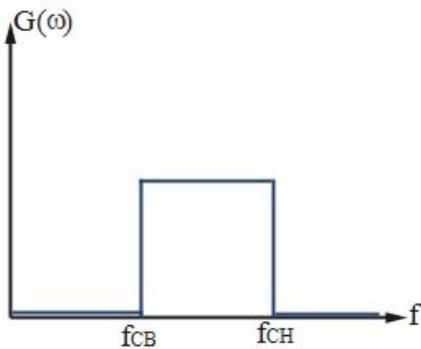
b) filtre passe-haut



Bande passante $[f_c ; \infty]$

Ce filtre laisse passer que les hautes fréquences.

c) Filtre passe-bande



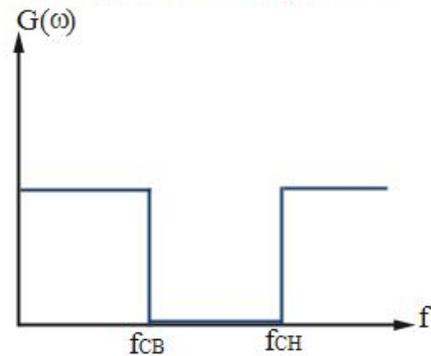
Ce filtre ne laisse passer qu'une bande de fréquence.

$$BP = [f_{CB} ; f_{CH}]$$

f_{CB} : fréquence de coupure basse

f_{CH} : fréquence de coupure haute

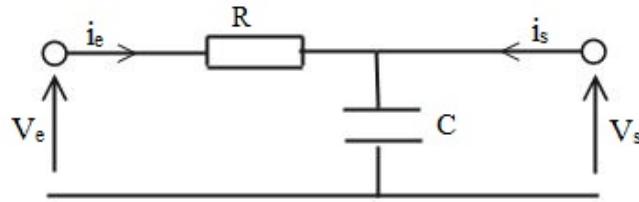
d) filtre coupe bande ou rejeteur de bande



Remarque : il est impossible de réaliser de tels filtres

III. Filtrés passifs du premier ordre

1. Filtre passe-bas



a. Fonction de transfert

$$\frac{V_s}{Z_c} = \frac{V_e}{Z_\tau}$$

$$Z_c = \frac{1}{C\omega j} \quad Z_\tau = R + \frac{1}{C\omega j}$$

$$H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{Z_c}{Z_\tau} = \frac{\frac{1}{C\omega j}}{R + \frac{1}{C\omega j}}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + jRc\omega} \quad \text{On pose } \omega_c = \frac{1}{RC}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

$$\text{En posant } x = \frac{\omega}{\omega_c}$$

$$\rightarrow H(\omega) = \frac{1}{1 + jx}$$

b. Diagramme de Bode

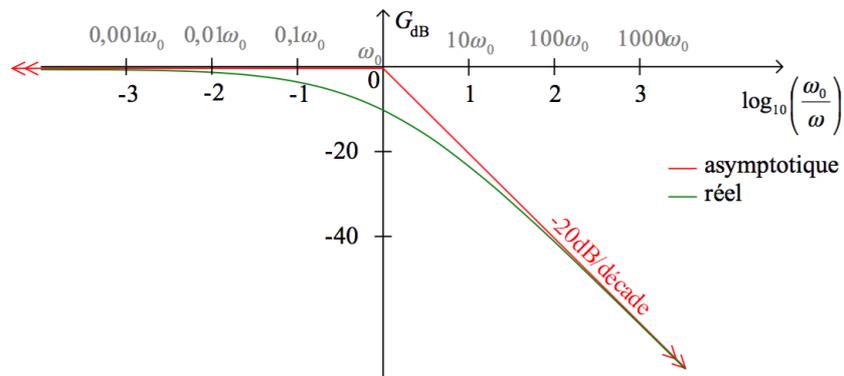
$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et } \varphi = -\arg(1+jx)$$

- Lorsque $x=1 \Rightarrow G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$: fréquence de coupure

On a un filtre passe-bas de bande passante $[0 ; \omega_c]$

- $G_{dB} = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = -20 \log_{10} \sqrt{1+x^2}$
 - Aux faibles fréquences : $x \ll 1 \Rightarrow G_{dB} \approx 0$
 - Fréquence de coupure : $x=1 \Rightarrow G_{dB} = -20 \log_{10} \sqrt{2} \approx -3 \text{ dB}$
 - Grandes fréquences : $x \gg 1 \Rightarrow G_{dB} = -20 \log_{10} \sqrt{1+x^2} \approx -20 \log x$ (pente de -20 dB/décade)

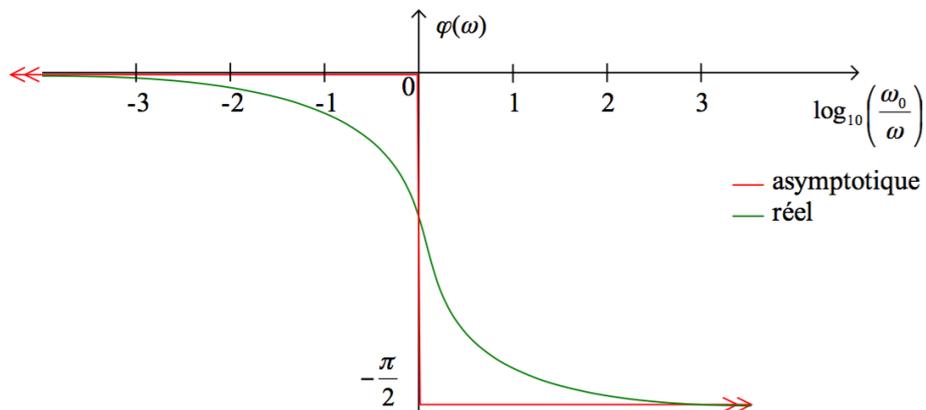
Courbe du gain : $G_{dB}=f(\log(x))$



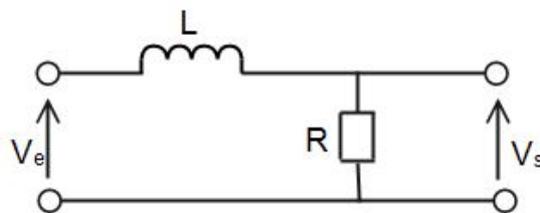
Argument de $H(j\omega)$

$$\varphi = \arg[H(j\omega)] = -\arg(1 + jx) = -\arctan \frac{\omega}{\omega_c} \begin{cases} \text{si } x = 1; \omega = \omega_c \Rightarrow \varphi = -45^\circ \\ \text{si } x = 0,1 \Rightarrow \varphi = -6^\circ \\ \text{si } x = 10 \Rightarrow \varphi = -84^\circ \end{cases}$$

Courbe de l'argument φ

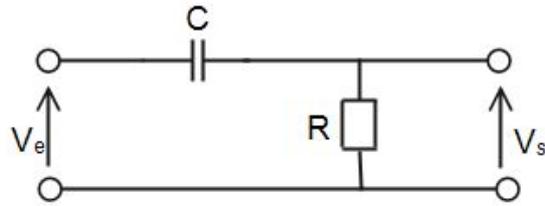


Remarque : en remplaçant la résistance R par une inductance L , le condensateur par une résistance R et en posant $\omega_c = \frac{R}{L}$, on obtient une fonction de transfert similaire



2. Filtre passe-haut

Soit le circuit suivant :



a. Fonction de transfert

$$\frac{V_e}{Z_t} = \frac{V_s}{Z_R} \Leftrightarrow \frac{V_e}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{V_s}{R}$$

$$H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} \Leftrightarrow H(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

On pose $\omega_c = \frac{1}{RC} \Rightarrow x = \frac{\omega}{\omega_c} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{j}{x}}$

b. Diagramme de Bode

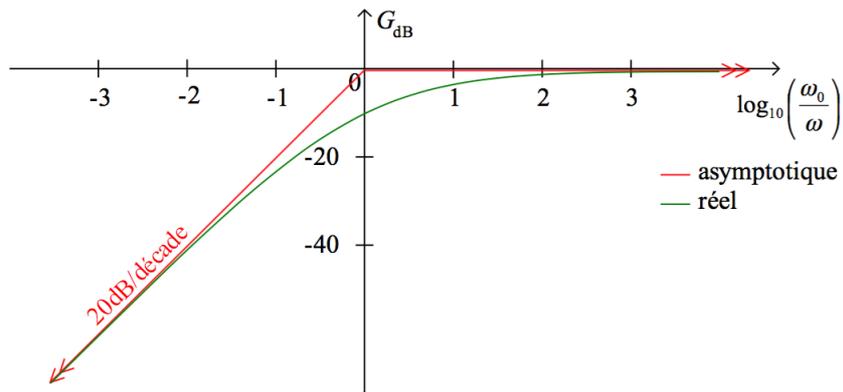
$$G(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$\varphi = -\arg\left(1 - \frac{j}{x}\right) = -\arctan\left(-\frac{1}{x}\right)$$

- $G_{dB} = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = -20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$

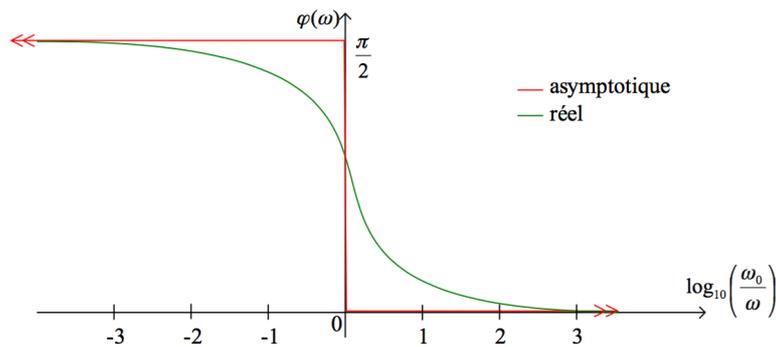
- Aux faibles fréquences $x \ll 1 \Rightarrow G_{dB} = -20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \approx +20 \log x$ (pente de 20 dB/décade)
- Fréquence de coupure $x = 1 \Rightarrow G_{dB} = -3 \text{ dB}$
- Grandes fréquences $x \gg 1 \Rightarrow G_{dB} \approx 0$

Courbe du gain



$$\varphi = -\arg\left(-\frac{1}{x}\right) \begin{cases} \text{si } x = 0,01 \Rightarrow \varphi \approx \frac{\pi}{2} = 90^\circ \\ \text{si } x = 1 \Rightarrow \varphi = 45^\circ \\ \text{si } x = 10 \Rightarrow \varphi = 5,7^\circ \end{cases}$$

Courbe de l'argument φ

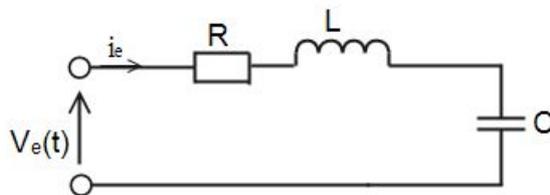


III. Filtrés passifs du second ordre

Pour les systèmes de second ordre, la fonction de transfert contient des termes en ω^2

1. Circuit RLC

Soit le quadripôle RLC suivant :



Loi des mailles :

$$-V_e + Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = 0$$

$$-U_e + RI + L\omega jI + \frac{I}{jC\omega} = 0 \Leftrightarrow \underline{U_e} = \left[R + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) j \right] I$$

Pulsation à la résonance : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$: pulsation propre.

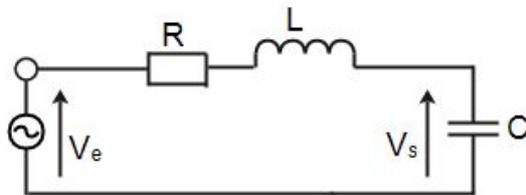
Coefficient de qualité du circuit RLC série à la fréquence de résonance.

$$Q_s = \frac{L\omega_0}{R}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow Q_s = \frac{1}{RC\omega_0}$$

$m = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$: Facteur d'amortissement

2. Filtre passe-bas



$$H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e}$$

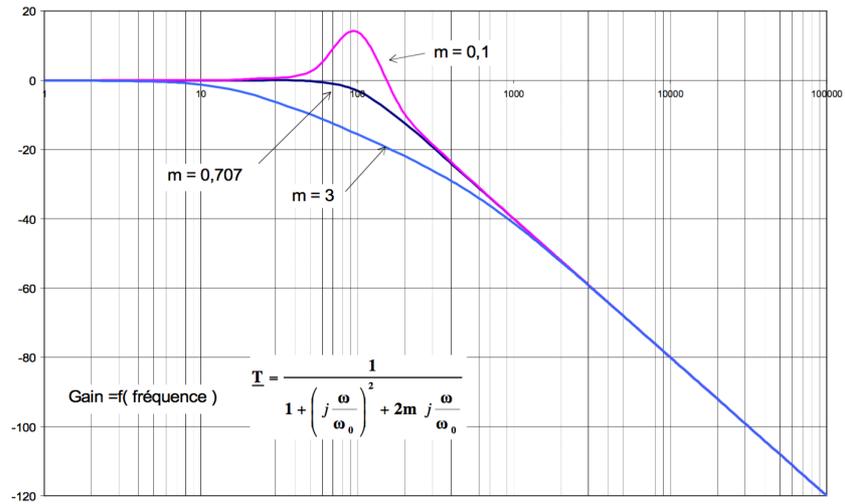
$$H(j\omega) = \frac{I}{jC\omega} \frac{1}{\left[R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] I}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{jRC\omega - LC\omega^2 + 1} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

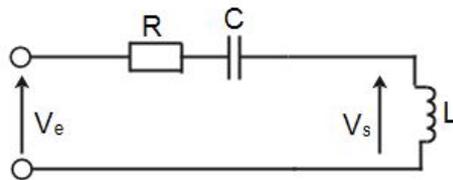
$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + jRC\omega_0 \frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega/\omega_0}{Q}}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}$$

Courbe du gain

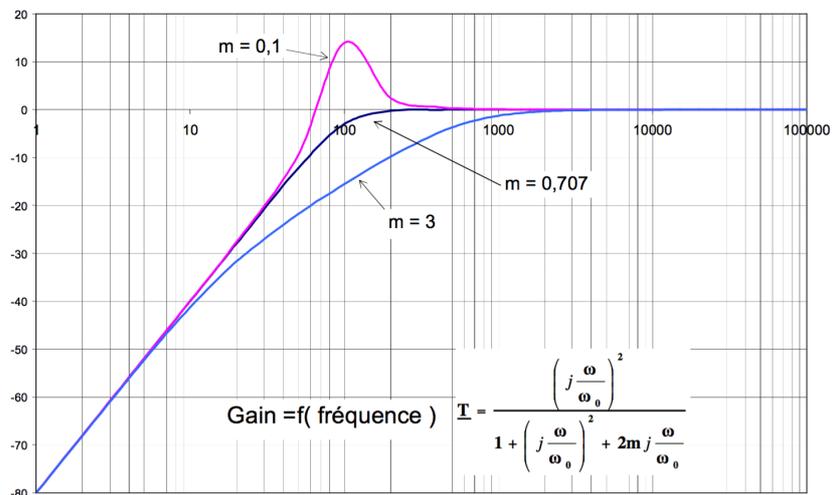


2. Filtre passe-haut



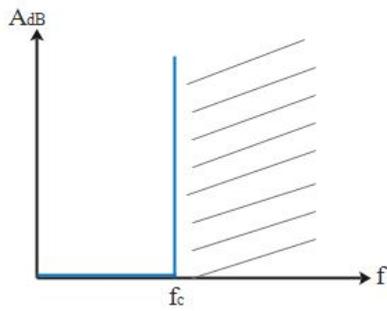
$$H(j\omega) = \frac{U_s}{U_e} = \frac{L\omega j}{R + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) j}$$

$$H(j\omega) = \frac{-LC\omega^2}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

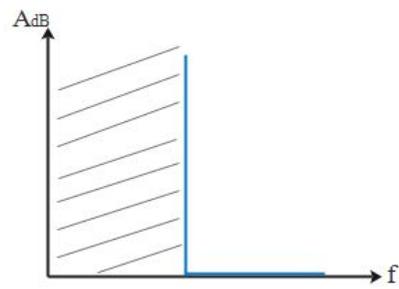


Annexe : Courbes d'atténuation des filtres

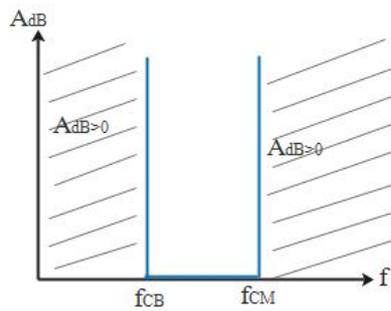
1) Filtre passe-bas



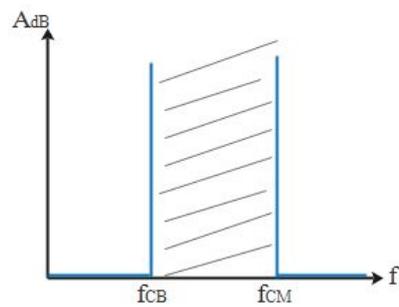
2) Filtre passe-haut



3) Filtre passe-bande



4) Filtre coupe-bande



Gabarit d'un filtre

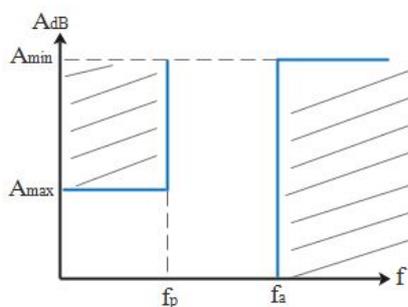
Il est impossible pratiquement de réaliser de tels filtres. Aussi se contente-t-on d'approcher cette réponse idéale en

- Conservant l'atténuation A inférieure à A_{\max} dans la bande passante
- Conservant l'atténuation A supérieure à A_{\min} dans la bande atténuée

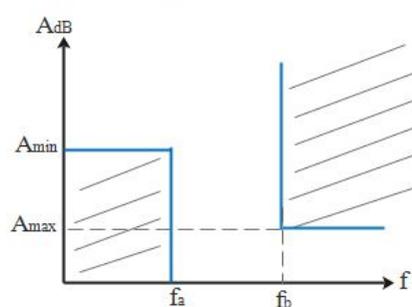
Cela conduit ainsi à définir un gabarit définissant les zones interdites et les zones dans lesquelles devront impérativement se situer les graphes représentant l'atténuation du filtre en fréquence.

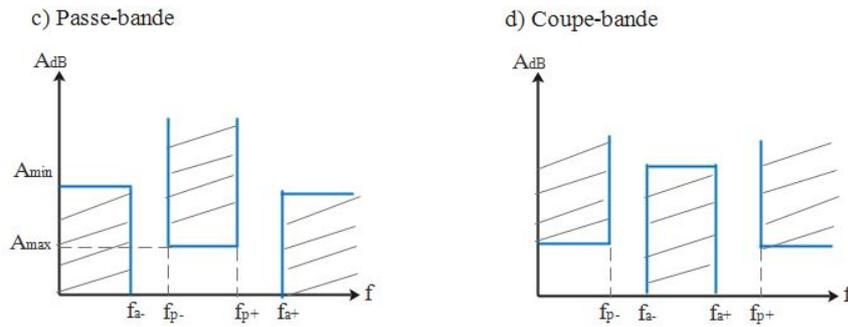
Suivant le type de réponse que l'on désire obtenir. On est amené à définir quatre familles de filtres

a) Passe-bas



b) Passe-haut





Si nous devons réaliser un filtre nous devons définir les valeurs A_{\max} ; A_{\min} ; f_a et f_p et plus un filtre se rapproche d'un filtre idéal et plus il nécessite de composants plus il est coûteux. Il faut chercher un compromis entre les performances idéales et un nombre de composants élevés. Pour parvenir à ce but on définit un gabarit à l'intérieur duquel la courbe d'atténuation du filtre doit se trouver.

Grandeurs caractéristiques du gabarit

Un gabarit est entièrement défini par la connaissance des grandeurs A_{\max} ; A_{\min} ; f_a et f_p .

On définit la sélectivité k et le largeur de bande relative B

Type de filtre	Sélectivité k	Bande relative B	Fréquence de référence
Passe-bas	$\frac{f_p}{f_a}$		f_p
Passe-haut	$\frac{f_a}{f_p}$		f_a
Passe-bande	$\frac{f_p^+ - f_p^-}{f_a^+ - f_a^-}$	$\frac{f_p^+ - f_p^-}{f_0}$	f_0
Coupe-bande	$\frac{f_a^+ - f_a^-}{f_p^+ - f_p^-}$	$\frac{f_a^+ - f_a^-}{f_0}$	f_0