Chapitre 2 : Quadripôles électriques

Introduction

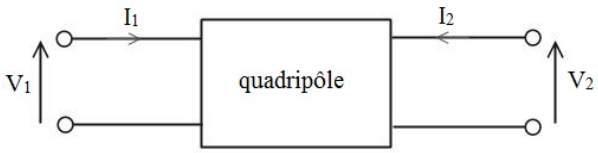
Les quadripôles jouent un rôle fondamental dans l'analyse de nombreux systèmes spécialement en électronique, automatique et énergétique.

I. Notion de quadripôle électrique

1. Définition

Un quadripôle est un réseau (composant ou ensemble de composants) à deux entrées et deux sorties qui permet le transfert d'énergie entre dipôles.
Les signaux électriques en entrée et en sortie peuvent être de nature différente (tension, courant, puissance).

2. Représentation



I_1 : courant d'entrée
I_2 : courant de sortie
V_1 : tension d'entrée
V_2 : tension de sortie
N.B : Par convention, on donne le sens positif aux courants qui pénètrent dans le quadripôle.

3. Equations caractéristiques

D'une manière générale, un quadripôle est défini par deux équations caractéristiques qui dérivent complètement son fonctionnement.

$$\begin{cases} f(I_1, I_2, V_1, V_3) = 0 \\ g(I_1, I_2, V_1, V_3) = 0 \end{cases}$$

Pour l'étude des quadripôles nous supposons les conditions suivantes :

- Les circuits du quadripôle sont linéaires
- Les conditions initiales aux bornes des capacités et des inductances sont nulles
- Les circuits internes du quadripôle ne comportent que des sources linéairement indépendantes.

L'avantage de la théorie qui va suivre est qu'on va poser les problèmes sous forme matricielle facile à résoudre numériquement.
La représentation matricielle a pour principal intérêt de simplifier considérablement les problèmes.

II. Matrices représentatives des quadripôles

Pour les quadripôles ne contenant que des dipôles linéaires et des sources linéairement dépendantes, les quatre grandeurs fondamentales V_1, V_2, I_1, I_2 sont liées par des équations linéaires. Plusieurs représentations matricielles sont possibles et le choix de l'une d'elle dépend du problème étudié.

1. Matrice impédance

On exprime les tensions en fonction des courants. Les éléments de la matrice ont la dimension d'impédance.

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases}$$

En notation matricielle

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$Z_{11} = \dfrac{V_1}{I_1}\Big|_{I_2=0}$: impédance d'entrée du quadripôle en laissant la sortie en circuit ouvert (I_2=0)

$Z_{12} = \dfrac{V_1}{I_2}\Big|_{I_1=0}$: impédance de transfert inverse du quadripôle obtenue avec l'entrée du quadripôle en circuit ouvert

$Z_{21} = \dfrac{V_2}{I_1}\Big|_{I_2=0}$: impédance de transfert (direct) du quadripôle obtenue avec la sortie du quadripôle en circuit ouvert

$Z_{22} = \dfrac{V_2}{I_2}\Big|_{I_1=0}$: impédance de sortie du quadripôle en laissant l'entrée du quadripôle en circuit ouvert (I_1=0)

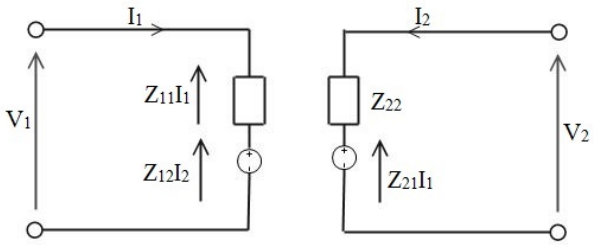


Schéma équivalent

2. Matrice admittance

Nous exprimons les courants I_1 et I_2 en fonction des tensions V_1 et V_2. Les éléments de la matrice sont homogènes à des admittances.

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$Y_{11} = \dfrac{I_1}{V_1}\Big|_{V_2=0}$: admittance d'entrée lorsque la sortie du quadripôle en court-circuit (V_2=0) :

$Y_{12} = \frac{I_1}{V_2}\Big|_{V_1=0}$: admittance de transfert inverse lorsque l'entrée du quadripôle est en court-circuit

$Y_{21} = \frac{I_2}{V_1}\Big|_{V_2=0}$: admittance de transfert (direct) lorsque la sortie du quadripôle est en court-circuit

$Y_{22} = \frac{I_2}{V_2}\Big|_{V_1=0}$: admittance de sortie obtenue avec l'entrée du quadripôle court-circuitée (V_1=0)

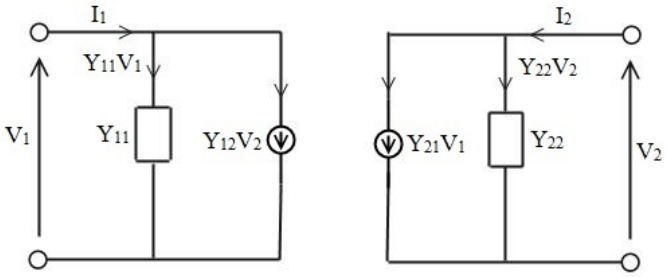
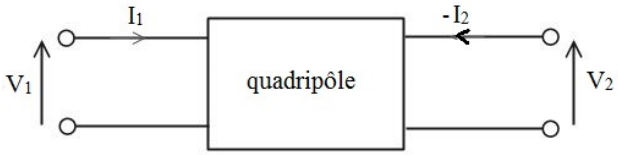


Schéma équivalent

3. Matrice de transfert ou matrice de chaine

On exprime les grandeurs de sortie en fonction des grandeurs d'entrée ou vice versa.



$$\begin{cases} V_1 = AV_2 - BI_2 \\ I_1 = CV_2 + DI_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

$A = \frac{V_1}{V_2}\Big|_{I_2=0}$: rapport de tension avec la sortie du quadripôle en circuit ouvert

$B = -\frac{V_1}{I_2}\Big|_{V_2=0}$: impédance de transfert négative avec la sortie du quadripôle court-circuitée

$C = \frac{I_1}{V_2}\Big|_{V_2=0}$: admittance de transfert avec la sortie du quadripôle en circuit ouvert

$D = -\frac{I_1}{I_2}\Big|_{V_2=0}$: rapport de courant négatif avec la sortie du quadripôle en court-circuit

On peut aussi avoir :

$$\begin{cases} V_2 = aV_1 - bI_1 \\ I_2 = cV_1 - dI_1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix}$$

$a = \left.\frac{V_2}{V_1}\right|_{I_1=0}$: gain en tension obtenu avec l'entrée du quadripôle en circuit ouvert

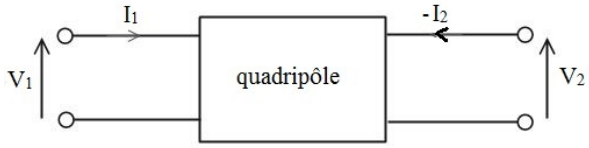
$b = -\left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{V_1=0}$: impédance de transfert négative avec l'entrée du quadripôle court-circuitée

$c = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{I_1=0}$: admittance de transfert avec l'entrée du quadripôle en circuit ouvert

$d = -\left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_1=0}$: gain en courant négatif avec entrée du quadripôle en court-circuit

4. Matrice hybride

L'intérêt de cette représentation apparait lors de l'étude des transistors. En électronique, les tripôles comme le transistor sont fréquemment transformés en quadripôle en choisissant l'une des bornes comme référence.



$$\begin{cases} V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$h_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{V_2=0}$: impédance d'entrée lorsque la sortie du quadripôle en court-circuit (V_2=0)

$h_{12} = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_1=0}$: rapport en tension avec l'entrée du quadripôle en circuit ouvert

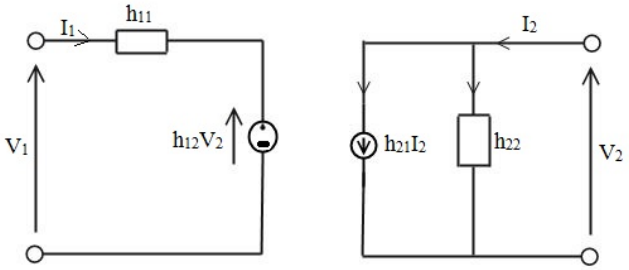
$h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0}$: gain en courant avec la sortie du quadripôle est en court-circuit

$h_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{I_1=0}$: admittance de sortie avec entrée du quadripôle en court-circuit

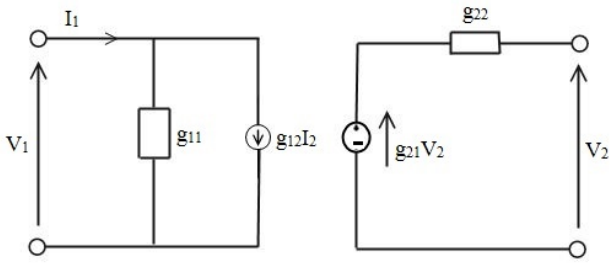
Des fois, on utilise :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} I_1 = g_{11}V_1 + g_{12}I_2 \\ V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2 \end{cases}$$



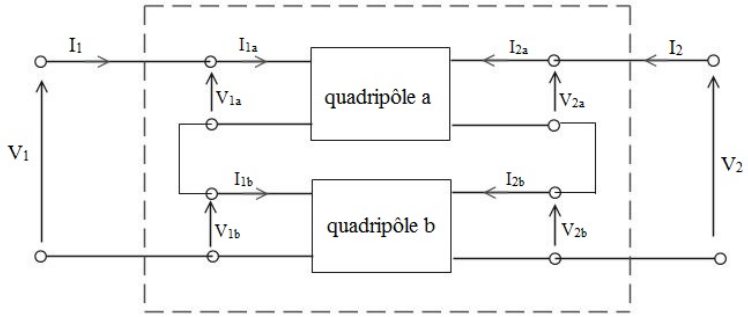
Matrice hybride inverse



III. Associations de quadripôles

Les quadripôles peuvent être associés de diverses manières (en série, en parallèle ou en cascade). Selon le type d'association nous utilisons à chaque fois la matrice la plus appropriée

1. Association en série



Quadripôle a :

$$V_{1a} = Z_{11a}I_{1a} + Z_{12a}I_{2a} \qquad V_{2a} = Z_{21a}I_{1a} + Z_{22a}I_{2a}$$

Quadripôle b :

$$V_{1b} = Z_{11b}I_{1b} + Z_{12b}I_{2b} \qquad V_{2b} = Z_{21b}I_{1b} + Z_{22b}I_{2b}$$

Remarquons que :

$$I_{1a} = I_{1b} = I_1 \text{ et } I_{2a} = I_{2b} = I_2$$

$$V_1 = V_{1a} + V_{1b} = (Z_{11a} + Z_{11b})I_1 + (Z_{12a} + Z_{12b})I_2$$

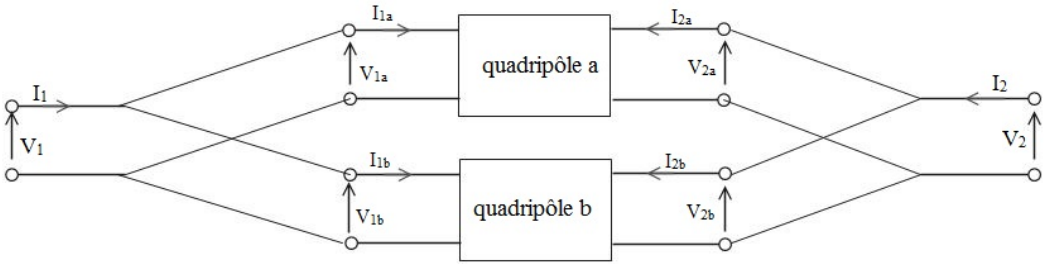
$$V_2 = V_{2a} + V_{2b} = (Z_{21a} + Z_{21b})I_1 + (Z_{22a} + Z_{22b})I_2$$

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11a} + Z_{11b} & Z_{12a} + Z_{12b} \\ Z_{21a} + Z_{21b} & Z_{22a} + Z_{22b} \end{bmatrix}$$

$$[Z] = [Z_a] + [Z_b]$$

La matrice impédance du quadripôle série est égal à la somme des matrices impédances de chacun des quadripôles.

2. Association en parallèle



$$V_{1a} = V_{1b} = V_1 \text{ et } V_{2a} = V_{2b} = V_2$$

$$I_1 = I_{2a} + I_{2b} = (Y_{11a} + Y_{11b})V_1 + (Y_{12a} + Y_{12b})V_2$$

$$I_2 = I_{1a} + I_{1b} = (Y_{21a} + Y_{21b})V_1 + (Y_{22a} + Y_{22b})V_2$$

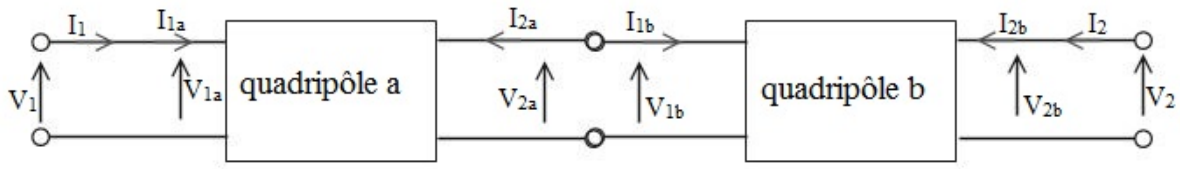
$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11a} + Y_{11b} & Y_{12a} + Y_{12b} \\ Y_{21a} + Y_{21b} & Y_{22a} + Y_{22b} \end{bmatrix}$$

$$[Y] = [Y_a] + [Y_b]$$

La matrice admittance du quadripôle parallèle est égale à la somme des matrices admittance de chacun des quadripôles.

3. Association en cascade

Les deux sorties du premier sont reliées aux deux entrées du second. On utilise les matrices de transfert des deux quadripôles associés.



$$\begin{bmatrix} V_{1a} \\ I_{1a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{2a} \\ -I_{2a} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_{1b} \\ I_{1b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{2b} \\ -I_{2b} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1a} \\ I_{1a} \end{bmatrix} ; \qquad \begin{bmatrix} V_{2a} \\ -I_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1b} \\ I_{1b} \end{bmatrix} ; \qquad \begin{bmatrix} V_{2b} \\ -I_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix}$$

$$[T] = [T_a][T_b]$$

La matrice de transfert du quadripôle équivalent est égale au produit de la première matrice de transfert du second.

Remarque : le produit matriciel n'est pas commutatif

IV. Quadripôles en charge

Lees quadripôles sont utilisés pour réaliser une fonction particulière ; amplification, filtrage… De ce fait, ils sont chargés soit par une impédance, soit par un court-circuit électrique.

1. Grandeurs fondamentales

Il est possible pour un quadripôle de définir les grandeurs caractéristiques : impédances d'entrée et de sortie, les gains en tension, courant et puissance.

a. Impédance d'entrée

C'est l'impédance $Z_E = \frac{V_E}{I_E}$ vue à l'entrée lorsque la sortie est chargée par une impédance Z_4.

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2$$
$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 = -Z_4I_2$$

$$\Rightarrow \quad Z_{21}I_1 = -(Z_{22} + Z_4)I_2$$

$$I_2 = -\frac{Z_{21}}{Z_{22} + Z_4} I_1$$

$$V_1 = Z_{11}I_1 - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_4} I_1$$

$$Z_E = \frac{V_1}{I_1} = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_4}$$

b. Impédance de sortie

C'est l'impédance $Z_S = \frac{V_S}{I_S}$ vue à la sortie lorsque l'entrée est fermée par une impédance Z_g qui l'impédance du générateur.

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 = -Z_gI_1$$
$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2$$

$$\Rightarrow \quad Z_{21}I_2 = -(Z_g + Z_{11})I_1$$

$$I_1 = -\frac{Z_{12}}{Z_{11} + Z_g}I_2$$

$$V_2 = Z_{22}I_2 - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{11} + Z_g}I_2$$

$$\Rightarrow \quad Z_S = \frac{V_2}{I_2} = Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{11} + Z_g}$$

c. Gain de tension

C'est le quotient de la tension de sortie par la tension d'entrée.

$$A_V = \frac{V_2}{V_1}$$

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2$$
$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 = -Z_4I_2$$

$$I_2 = -\frac{V_2}{Z_4}$$

Et $I_1 = -\frac{(Z_{22} + Z_4)}{Z_{21}}I_2 \Rightarrow \quad I_1 = -\left(\frac{Z_{22} + Z_4}{Z_{21}}\right)\left(-\frac{V_2}{Z_4}\right)$

$$V_1 = Z_{11}\left(\frac{Z_{22} + Z_4}{Z_{21}}\right)\left(\frac{V_2}{Z_4}\right) + Z_{12}\left(-\frac{V_2}{Z_4}\right)$$

$$V_1 = \frac{Z_{11}(Z_{22}+Z_4)}{Z_{21}Z_4}V_2 - \frac{Z_{12}}{Z_4}V_2$$

$$V_1 = \left[\frac{Z_{11}(Z_{22}+Z_4)}{Z_{21}Z_4} - \frac{Z_{12}}{Z_4}\right]V_2$$

$$V_1 = \left[\frac{Z_{11}(Z_{22}+Z_4)}{Z_{21}Z_4} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_4Z_{21}}\right]V_2$$

$$A_V = \frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_4Z_{21}}{Z_{11}(Z_{22}+Z_4) - Z_{12}Z_{21}}$$

V. Quadripôles particuliers

1. Quadripôles passifs

Ils ne comportent pas de générateurs de courant ou de tension. Le théorème de réciprocité permet d'écrire que :

$$Z_{12} = Z_{21}$$
$$Y_{12} = Y_{21}$$

On peut aussi montrer que :

$$h_{12} = -h_{21}$$

2. Quadripôles symétriques

Un quadripôle est symétrique s'il existe dans la disposition, la nature et les valeurs des éléments constituant le quadripôle une symétrie entre sortie et entrée. Nous avons alors :

$$Z_{11} = Z_{22}$$

$$Y_{11} = Y_{22}$$

$$T_{11} = -T_{22}$$

(le signe moins vient du fait que le courant I_2 est considéré sortant et non entrant).

3. Quadripôle unidirectionnel

Dans un quadripôle unidirectionnel, l'énergie ne peut être transmise que dans un seul sens.