Vibrations et Ondes

Pr. Mactar FAYE

Chapitre 1 Introduction à la vibration des systèmes

1. Définitions et représentation d'un système oscillant

Définition d’un mouvement périodique ou vibration

On appelle mouvement périodique ou vibration un mouvement qui se répète et dont chaque cycle reproduit exactement tout autre cycle.

De nombreux phénomènes physiques avec des mouvements périodiques sont présents autour de nous : mouvement des branches des arbres sous l’action du vent, le pendule d’horloge, les pistons et bielles d’une machine à vapeur, l’aiguille d’une machine à coudre, le mouvement des bras lors de la marche, le battement du cœur, la rotation de la terre ….

Tous les corps ou systèmes de corps qui peuvent effectuer d’eux-mêmes des mouvements périodiques ou vibrations portent le nom de Systèmes oscillants.

Exemples de systèmes oscillants : l'eau dans un verre sous l'action d'un choc initial, un poids suspendu à un ressort, un automobile sur ses ressorts de suspension, une balançoire ………….

Représentation d'un système oscillant

Un système oscillant peut osciller en l'absence de force de frottement (système conservatif) ou en présence de force de frottement (système dissipatif)

Le mouvement d'un système oscillant peut être caractérisé par une seule grandeur (variable). On parle alors de système à 1 degré de liberté.

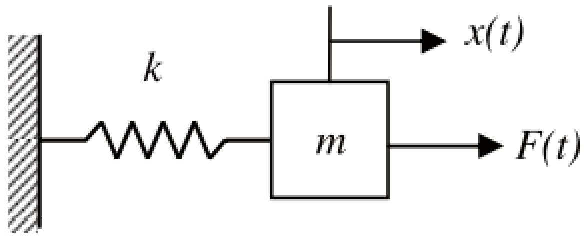
Par exemple : le mouvement d'un poids suspendu à un ressort est caractérisé par l'élongation x. Le mouvement d'un pendule simple est caractérisé par un angle θ. ………….

Le mouvement d'un système oscillant peut être caractérisé par deux grandeurs (variables). On parle alors de système à 2 degrés de liberté.

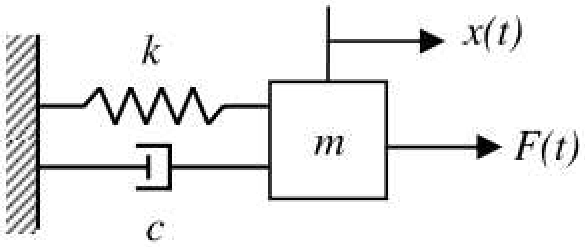
Par exemples : le mouvement d'un système formé deux poids identiques, l'un relié à l'extrémité de deux ressorts et l'autre à l'extrémité libre d'un des ressorts. L'extrémité libre est suspendu au plafond. Le système est caractérisé par l'élongation de la masse 1 (x1) et l'élongation de la masse 2 (x2).
Le mouvement d'un pendule double (deux pendules simples attachés l'un à l'autre et l'extrémité libre est attaché à un plafond) est caractérisé par deux angles $\theta 1$ et $\theta 2$. ………….

Un système oscillant à 1 degré de liberté (une variable) peut être représenté par :

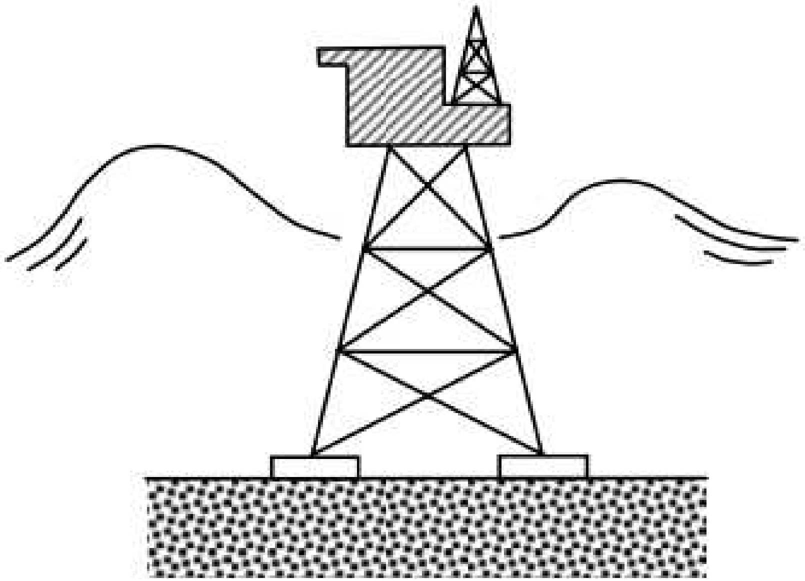
- Un système masse-ressort (système conservatif)

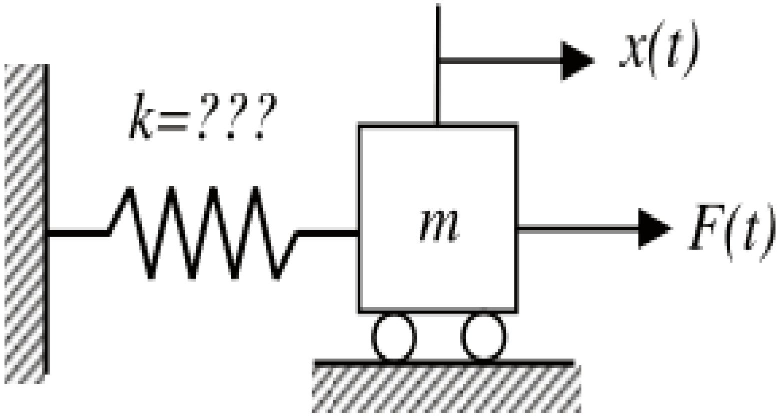


- Un système masse-ressort-amortisseur (système dissipatif)

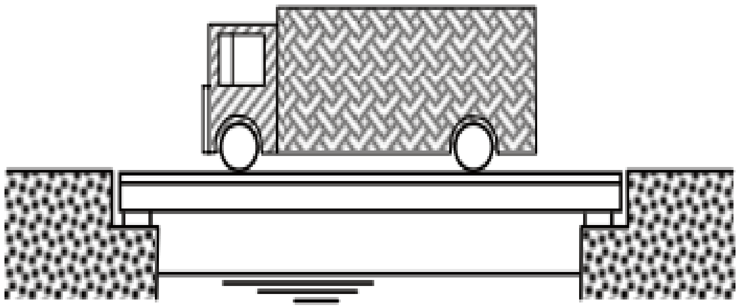


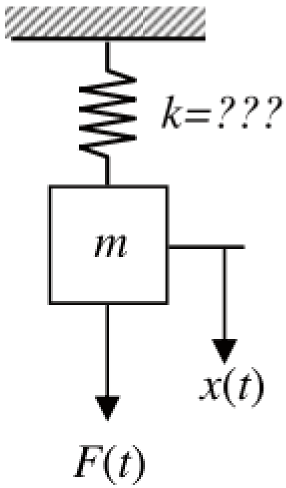
Exemple 1 : Plateforme offshore



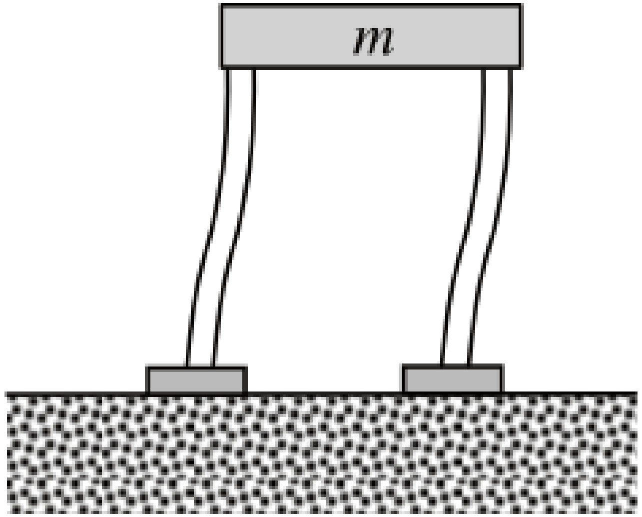


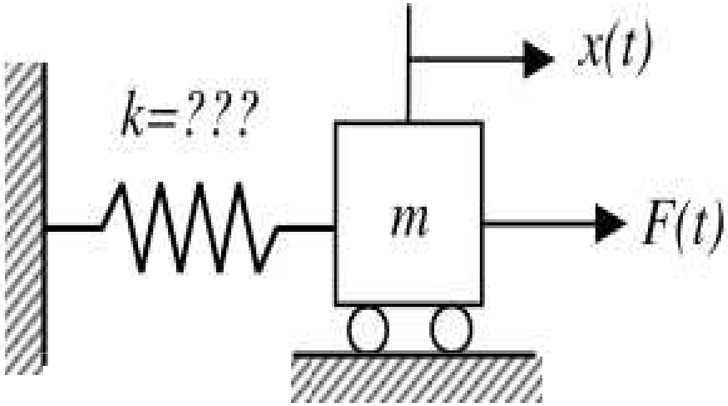
Exemple 2 : Pont





Exemple 3 : le bâtiment





2. Méthodes d'établissement de l'équation du mouvement d'un système

Il existe deux méthodes pour trouver l’équation du mouvement d’un système :

- la relation fondamentale de la dynamique
- l’équation de Lagrange

Méthode N°1: Relation fondamentale de la dynamique

$$m\ddot{x} = \sum F_{ext}$$

Cas1: le système est conservatif et est à un degré de liberté

Les forces extérieures sont :

- ❖Le système est soumis à une force de rappel $f_{ressort} = -k\,x$
- ❖Le système est également soumis des forces excitatrices F.

L'équation du mouvement est : $m\ddot{x} + k\,x = F$

Cas 2: le système est dissipatif et est à un degré de liberté

Les forces extérieures sont :

- ❖Le système est soumis à une force de rappel $f_{ressort} = -k\,x$

- ❖Le système est soumis à une force de frottement $f_{amortisseur} = -C\,\dot{x}$

- ❖Le système est également soumis des forces excitatrices F.

L'équation du mouvement est : $m\,\ddot{x} + C\,\dot{x} + k\,x = F$

Méthode N°2: Equation de Lagrange

Cas1: Equation de Lagrange pour un système conservatif à un degré de liberté

Considérons un système de masse *m* en mouvement dont le mouvement est paramétré par x.

❖Son énergie cinétique est :

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

❖Si le système est conservatif, il est soumis à des forces dérivant d'un potentiel E_p :

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

❖Le système est également soumis à des forces excitatrices F.

L'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)=F$$

où $L = E_c - E_p$ est le Lagrangien du système.

On peut alors en déduire l'équation :

$$m\,\ddot{x} + k\,x = F$$

(si le système est conservatif)

Cas 2: Equation de Lagrange pour un système non conservatif à un degré de liberté

Le système est soumis, en plus des forces excitatrices *F*, à des forces dissipatives F_{Diss} :

$$F_{diss} = -C\,\dot{x}$$ (force de frottement visqueux).

L'équation de Lagrange s'écrit :
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = F \ + F_{diss}$$

On peut alors en déduire l'équation : $m\,\ddot{x} + C\,\dot{x} + k\,x = F$

(si le système est dissipatif)

3. Solution générale d'une équation différentielle

Les équations du mouvement sont des équations différentielles du second ordre de la forme :

$$a\ddot{x} + b\,\dot{x} + cx = d$$

La solution générale *x* est la superposition de la solution générale de l'équation homogène (x_{SGEH}) et d'une solution particulière de l'équation complète (x_{SPEC}).

$$x = x_{SGEH} + x_{SPEC}$$

Remarques :

Dans la réalité, la solution de l'équation homogène est toujours amortie.
La solution x_{SGEH} devient négligeable au bout d'un temps suffisamment long (solution transitoire).

x_{SPEC} est *la solution en* régime permanent ou en régime établi.