Chapitre 1

Séries de Fourier

Soit f une fonction périodique de période T . Joseph Fourier, mathématicien français, affirma, dans un mémoire daté de 1807, qu'il est possible dans certaines conditions, de décomposer une fonction périodique sous la forme d'une somme infinie de signaux sinusoidaux : Ainsi on a dans certaines conditions (parexemple si f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux)

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nwt + b_n \sin nwt, \text{ avec } T = \frac{2\pi}{w} \quad (1.1)$$

On peut donc considérer f comme la somme - d'un terme constant a_0 d'un nombre fini de termes sinusoidaux appelés harmoniques. L'harmonique de rang n est

$$u_n = a_n \cos nwt + b_n \sin nwt$$

Il peut s'écrire sous la forme

$$u_n = A_n \cos(nwt - \varphi_n)$$

avec $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et $\tan \varphi_n = \frac{b_n}{a_n}$. A_n représente l'amplitude, $\frac{2\pi}{nw}$ la période, φ_n la phase et $\frac{nw}{2\pi}$ la fréquence.

1.1 Séries trigonométriques

Définition 1.1.1 On appelle série trigonométrique toute série de la forme $\sum \underbrace{a_n \cos nx + b_n \sin nx}_{U_n}$

où a_n et b_n sont des suites réelles ou complexes.

En utilisant l'exponentielle complexe (les formules d'Euler) on a

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

le terme général de la série devient $U_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{inx} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-inx}$ on peut donc écrire la série précédente sous la forme d'une série à double entrée $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ avec

$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ si $n \geq 0$ et $c_{-n} = (a_n + ib_n)$ si $n \geq 0$ avec la condition $b_0 = 0$ On dira que la série à double entrée $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n$ est convergente si la série $\sum_{n \geq 0} |c_n| + |c_{-n}|$ est convergente

Proposition 1.1.1 Si les séries $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ converge alors la série trigonométrique $\sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$ est normalement convergente et uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ et sa somme est une fonction continue.

1.2 Coefficients de Fourier

Définition 1.2.1 Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}$ à dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. f est dite **périodique de période T** si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x, T) = f(x)$

Définition 1.2.2 On appelle coefficients de fourier d'une fonction continue par morceau (ou localement intégrale) 2π périodique les nombres définis par

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, n \in \mathbb{N}^*$$

ou bien

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, n \in \mathbb{Z}$$

Remarque 1.2.1 On utilise a_n et b_n pour une fonction à valeurs réelles et c_n pour une fonction à valeurs complexes.

Définition 1.2.3 La série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

s'appelle **série de Fourier partielle d'ordre N** de f

On appelle **série de Fourier** de f la limite quand elle existe, de $F_N f(x)$ et on la note

$$Ff(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} F_N f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Exercice 1.2.1 Calculer les coefficients de fourier des fonctions suivantes et donner la série de fourier associée à f

1)

$$g(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in]0, \pi[\\ -1 & \text{pour } x \in]-\pi, 0[\end{cases} \quad (1.2)$$

2) $H(x) = |x|$ sur $]-\pi, \pi[$

3) $I(x) = x$ sur $]-\pi, \pi[$

4) $J(x) = x^2$ sur $]-\pi, \pi[$.

Le principal problème que nous étudions dans la suite est le suivant :
 - La série de fourier converge t-elle. Et si elle converge converge -t-elle vers f .
 -Et de quelle convergence s'agit t-elle.

1.3 Propriétés

- Si f est une fonction paire alors

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx, \quad b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Si f est une fonction impaire alors

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx, \quad a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Exercice 1.3.1 1) Trouver les coefficient de fourier de la fonction 2π périodique définie par $f(x) = x$, $-\pi \leq x \leq \pi$
 2) Trouver les coefficients de Fourier de la fonction

$$\begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ \pi, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \quad (1.3)$$

Remarque 1.3.1 Une fonction 2π -périodique est entièrement déterminée par sa restriction sur $[0, 2\pi]$ ou sur un intervalle de la forme $[\alpha, \alpha + 2\pi]$
 Les coefficients de Fourier d'une fonction 2π -périodique sont entièrement déterminée par la connaissance de f sur $[\alpha, \alpha + 2\pi]$

Remarque 1.3.2 Nous avons définie la série de fourier pour les fonctions 2π - périodiques ; on peut définir une notion semblable pour les fonctions qui sont L -périodiques.

Supposons f est définie et intégrable sur $[-L, L]$ Posons $F(x) = f(\frac{Lx}{\pi})$.

La fonction $F(x)$ est définie et intégrable sur $[-\pi, \pi]$. La série de fourier de $F(x)$ s'écrit

$$F(x) = f\left(\frac{Lx}{\pi}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1.4)$$

En utilisant la substitution de $t = \frac{Lx}{\pi}$ on a la définition suivante

Définition 1.3.1 Soit $f(x)$ une fonction définie sur $[-L, L]$. La série de Fourier de $f(x)$ est

$$a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(n\frac{\pi t}{L}) + b_n \sin(n\frac{\pi t}{L})), \quad \text{pour } n \geq 1 \quad (1.5)$$

où

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{Lx}{\pi}\right) \cos nx dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(n\frac{\pi x}{L}\right) dx \quad (1.6)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{Lx}{\pi}\right) \cos nx dx = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(n\frac{\pi x}{L}\right) dx \quad (1.7)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{Lx}{\pi}\right) \sin nx dx = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right) dx \quad (1.8)$$

$$(1.9)$$

Exercice 1.3.2 Application : Trouver la série de fourier de la fonction f

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad (1.10)$$

Solution Ici on a $L = 2$, $a_0 = \frac{1}{4} \int_0^2 x dx = \frac{1}{2}$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^2 x \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 (\cos(n\pi) - 1) = \frac{2}{n^2\pi^2} ((-1)^n - 1)$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_0^2 x \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = -2 \frac{\cos n\pi}{n\pi} = \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1}$$

La série de fourier de f s'écrit alors

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2\pi^2} ((-1)^n - 1) \cos \frac{n\pi x}{2} + \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1} \sin \frac{n\pi x}{2}$$

Définition 1.3.2 Une fonction f définie de $\mathbb{R}$ à valeurs de $\mathbb{R}$ est dite régulière par morceaux si elle est régulière par morceaux sur tout compact $[a, b]$, ie :

1. f continue par morceaux sur $[a, b]$ ce qui veut dire qu'il existe

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n+1} = b$$

tels que, $\forall i = 0, 1, \dots, n, f|_{(a_i, a_{i+1})}$ est continue et

$$\lim_{x \rightarrow a_i, x > a_i} f(x) = f(a_i + 0), \quad \lim_{x \rightarrow a_i, x < a_i} f(x) = f(a_i - 0)$$

existent et sont finies ;

2. f' existe et continue par morceaux sur (a_i, a_{i+1}) et

$$\lim_{x \rightarrow a_i, x > a_i} f'(x) = f'(a_i + 0), \quad \lim_{x \rightarrow a_i, x < a_i} f'(x) = f'(a_i - 0)$$

existent et sont finies.

Théorème 1.3.1 Théorème Dirichlet

Soit f une fonction 2π -périodique localement intégrable (régulière par morceaux). Soient a_n et b_n et $F_N f$ comme dans la définition précédente. Alors la limite $Ff(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ et

$$Ff(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(où $f(x+0) = \lim_{y \rightarrow x, y > x} f(y)$ et $f(x-0) = \lim_{y \rightarrow x, y < x} f(y)$). Donc, en particulier, si f est continue en x , alors

$$Ff(x) = f(x).$$

De plus, si f est continue, alors la convergence de la série ci-dessus vers la fonction f est uniforme.

Théorème 1.3.2 Différentiation terme à terme Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π -périodique continue telle que f' régulière par morceaux. Soit

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

sa série de Fourier. La série obtenue par différentiation terme à terme de la série de f converge et $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\frac{f'(x+0) + f'(x-0)}{2} = \sum_{n=1}^N n \{b_n \cos nx - a_n \sin nx\}$$

Théorème 1.3.3 Intégration terme à terme Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π -périodique régulière par morceaux. Soit

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

sa série de Fourier. Alors pour $x_0, x \in [0, 2\pi]$, on a

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{x_0}^x \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dt$$

1.4 Inégalité de Bessel et théorème de Parseval

Proposition 1.4.1 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ 2π -périodique et intégrable sur $[-\pi, \pi]$. Alors les coefficients de Fourier de types complexes vérifient $\forall n \in \mathbb{N}$ l'inégalité de Bessel :

$$\sum_{k=-n}^{k=n} |c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

Théorème 1.4.1 Identité de Parseval

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -périodique régulière par morceaux. Alors

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Exercice 1.4.1 Trouver la série de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = -\pi \\ \frac{x}{2} & \text{si } x \in (-\pi, \pi) \\ 0 & \text{si } x = \pi \end{cases} \quad (1.11)$$

pour $x \in [-\pi, \pi]$ et étendue par 2π -périodicité. Comparer Ff et f .
Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$