Table des matières

1 Séries Numériques **2**
1.1 Généralités 2
1.2 Série à terme réels positifs 4
1.3 Séries à termes quelconques 8
1.3.1 Séries absolument convergentes 8
1.4 Règles de Cauchy et d'Alembert 9
1.4.1 Règle de Cauchy 9
1.4.2 Règle de D'Alembert 9
1.4.3 Critère d'Abel 10
1.5 Série produit 12
1.6 Exercices 13

Chapitre 1

Séries Numériques

1.1 Généralités

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels ou complexes. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=n}^{n} u_k$$

On construit donc une suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On se propose dans ce chapitre d'étudier la nature de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 1.1.1 *Le couple des deux suites (u_n) et (S_n) est appelé **série** ; u_n est le **terme général de la série** et S_n la somme des $n+1$ **premiers termes** de la série.*

Définition 1.1.2 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes. On dit que la série de terme général u_n notée $(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n)$ est **convergente** si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet **une limite finie** S quand n tend vers $+\infty$.*
Dans ce cas la limite S de S_n est appelée la somme de la série et on écrit

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$$

*Si S_n ne tend pas vers une limite finie quand n tend vers $+\infty$ on dit que la série est **divergente**.*

Exemple 1.1.1 *1. série géométrique : C'est une série dont le terme général est de la forme $u_n = q^n$. $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^{n-1}$*

$$S_n = 1 + q + \ldots + q^{n-1}$$

Si $q = 1$, $S_n = n$ donc la série diverge.
Si $q \neq 1$, $S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$, alors S_n tend vers une limite finie si et seulement si $|q| < 1$, la somme de la série est alors $\frac{1}{1-q}$.

2. *La série harmonique : Cest la série dont le terme général est de la forme* $u_n = \frac{1}{n}$ *où* $n \in \mathbb{N}$. *Montrons que cette série nest pas convergente. Pour cela montrons quelle nest pas de Cauchy. En effet, posons* $S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.
   Alors
$$S_{2n} - S_n = \Big(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}\Big) - \Big(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\Big)$$
$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$
   Or pour tout $p \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq n$, *on a* $n+1 \leq p+n \leq 2n$ *et par suite on a :* $S_{2n} - S_n \geq n(\frac{1}{2n}) = \frac{1}{2}$. *La suite* $(S_n)_n$ *n'est pas de Cauchy, donc divergente. De plus,* $(S_n)_n$ *est strictement croissante, on en déduit alors que* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

3. *La série* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)}$ *est convergente. En effet* $u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Définition 1.1.3 *On appelle* ***suite des restes de la série*** $\sum u_n$, *la suite* R_n *définie par* $R_n = S - S_n$. R_n *est donc le reste d'ordre* n.

Théorème 1.1.1 *Pour que la série de terme général* u_n *converge il est nécessaire mais non suffisant que :*
$\lim_{+\infty} u_n = 0$

Preuve. Supposons que la série de terme général u_n converge et soit S sa somme. On a $S_n - S_{n-1} = u_n$ en passant à la limite comme S_n et S_{n-1} ont même limite à l'infini alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = S - S = 0$.
Cette condition n'est pas suffisante car pour s'enconvaincre il suffit de prendre la série harmonique qui diverge alors que le terme général $\frac{1}{n}$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini. ■

Remarque 1.1.1 *Cas des suites complexes*
Si le terme général u_n *est complexe* $u_n = a_n + ib_n$, *la somme partielle est* $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{n=0}^{n}(a_n + ib_n) = \sum_{k=0}^{n} a_k + i\sum_{k=0}^{n} b_k$. *Alors on a le résultat suivant :* $(\sum u_n)$ *converge* $\Longleftrightarrow (\sum_{k=0}^{n} a_k)$ *et* $(\sum_{k=0}^{n} b_k)$ *convergent en même temps.*
Dans ce cas on le résultat suivant $\sum_{k=0}^{+\infty} u_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n + i\sum_{k=0}^{+\infty} b_n$.

Remarque 1.1.2 *On ne modifie la nature d'une série en modifiant un nombre fini de ses termes ou en multipliant tous ses termes par une constante non nulle.*

Théorème 1.1.2 *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes. Alors*
a) la série de terme général $u_n + v_n$ appelée somme des deux séries est convergente et on

$$\sum_{0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

b) La série $\sum(\lambda v_n)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\in \mathbb{C}$ est convergente et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Si u_n est une suite numérique la suite S_n est convergente si et seulement si elle est de Cauchy ie $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m > N$ et $n > N$ on a $|Sm - S_n| < \epsilon$. $|S_m - S_n| = |u_{n+1} + \ldots + u_m|$

Théorème 1.1.3 ***Critère de Cauchy pour les Séries***
Soit (u_n) une suite de nombres réels ou complexes. Pour que la série $\sum u_n$ converge il faut et il suffit qu'elle vérifie le ***critère de Cauchy des séries*** *:*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \, tel \; que \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 (N \leq n < p) \Rightarrow |\sum_{k=n+1}^{p} u_k| < \epsilon$$

Exemple 1.1.2 *Série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$*
Considérons la série de terme général $u_n, n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ on a

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

La suite S_n ne vérifie pas le critère de Cauchy et ne peut pas donc converger. La série harmonique diverge.

1.2 Série à terme réels positifs

Définition 1.2.1 *Une série $(\sum u_n)$ est dite à terme positifs si u_n à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.*

1. Si $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ désigne la suite des sommes partielles on a $S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \geq S_n$. Donc la suite S_n est croissante.
2. Les séries $(\sum u_n)$ vérifiant $u_n \geq 0$ pour $n \geq n_0$ sont aussi appélées séries à terme positifs.

Exemple 1.2.1

$$\sum_{1}^{+\infty} \ln(1 + \frac{1}{n}), \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

Proposition 1.2.1 *Pour qu'une série $\sum u_n$ à termes positifs soit convergente il faut et il suffit que la suite S_n des sommes partielles soit majorée.*

Preuve. La somme S_n des sommes partielles est croissante. Il suffit donc de voir que toutesuite croissante et majorée converge. ■

Théorème 1.2.1 ***Comparaison de séries à termes positifs***
Soient u_n et v_n deux suites de $\mathbb{R}_+$. On suppose que $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout n.

1. *Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge et on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ et pour tout n on a la mojoration du reste $\sum_{k=n+1}^{N} u_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.*

2. *Si la série $\sum u_n$ diverge, la série $\sum v_n$ diverge.*

Preuve. Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. De $u_n \leq v_n$ on en déduit $S_n \leq T_n$. Si la série $\sum v_n$ converge la suite T_n est majorée donc la suite S_n l'est aussi et par conséquent la suite $\sum u_n$ converge. De plus le passage des inégalités larges à la limite donne

$$\lim_{n\to+\infty} S_n \leq \lim_{n\to+\infty} T_n$$

c'est à dire

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

Fixons donc n et appliquons ce dernier résultat aux deux séries $\sum u'_k$ et $\sum v'_k$ où

$$u'_k = u_k,\ v'_k = v_k\ sik > n \text{ et } u'_k = v'_k = 0sik \leq n$$

on a bien $0 \leq u'_k \leq v'_k$ pour tout k et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$. ■

Théorème 1.2.2 ***Comparaison avec une intégrale***
Soit f une fonction définie positive, continue et décroissante pour tout $x \geq a \geq 1$.
Alors la série de terme général $u_n = f(n)$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ sont de même nature.

Preuve. Remarquons tout dabord la chose suivante : $(x \in [n, n+1] \iff nxn+1)$ et comme f est décroissante $u_{n+1} = f(n+1) \leq f(x) \leq f(n) = u_n$. En intégrant membre à membre on obtient $\int_n^{n+1} u_{n+1}dx \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq \int_n^{n+1} u_n dx$ ou encore $u_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq u_n$. En sommant membre à membre, on obtient $\sum_{k=1}^{n} u_{k+1} \leq \sum_1^n \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} u_k$.
Finalement on aboutit à :

$$S_{n+1} - u_1 \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq S_n$$

Démonstration du théorème : 1) Si $(\sum u_n)$ converge alors $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ est majorée. Cela veut dire qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N},\ S_n \leq M$. Daprs la remarque (*)

ci-dessous, $\int_1^{n+1} f(x)dx \leq S_n \leq M$.
Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Posons $n = [t]$ la partie enticère de t;
$\int_1^{[t]} f(x)dx \leq \int_1^{[t]+1} f(x)dx = \int_1^{n+1} f(x)dx \leq S_n \leq M$.
On passe à la limite quand $t \to +\infty (\Longrightarrow n \to +\infty)$, on obtient $\int_1^{+\infty} f(x)dx \leq M$.
Ce qui se traduit par lexistence de lintégrale $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.
2) Inversement, on suppose que lintégrale $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ existe. De la relation (*) on déduit que

$$S_{n+1} \leq 1 + \int_1^{n+1} f(x)dx \leq u_1 + \int_1^{+\infty} f(x)dx = C.$$

La suite $(S_n)_n$ étant croissante et est majorée par C, ellle est convergente. La série $(\sum u_n)$ l'est aussi. ■

Exemple 1.2.2 ***Série de Riemann*** $\sum \frac{1}{n^\alpha}$
Considérons la fonction $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ qui vérifie les hypothèses du théorème. Donc la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ est donc de même nature que l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ qui converge pour tout $\alpha > 1$.

Théorème 1.2.3 ***Critère de Riemann***
Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite définie par $u_n = \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$.
Si $\alpha > 1$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge.
Si $\alpha \leq 1$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

Théorème 1.2.4 ***Critère déquivalence***
Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels positifs. Si $u_n \sim v_n$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Preuve. $v_n = u_n + \epsilon(n)u_n$ avec $\lim_{n\to+\infty} \epsilon(n) = 0$.
Comme $\epsilon(n) \to 0$, $\exists M \, \forall \, n \geq M$ on a $|\epsilon(n)| < \frac{1}{2}$.
Supposons $n \geq M$ alors on a $\frac{1}{2}u_n \leq v_n \leq \frac{3}{2}u_n$. Posons $S_n = \sum_{k=0}^n u_n$, $S'_n = \sum_{k=0}^n v_n$
Si $n \geq M$ on a

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \ldots + u_{M-1} + u_M + \ldots + u_n \\ &\leq S_{M-1} + 2(v_M + \ldots + v_n) \\ &\leq S_{M-1} + 2(V_0 + \ldots + v_M) \end{aligned}$$

Donc

$$S_n \leq S_{M-1} + 2S'_n \quad (*)$$

De même

$$S'_n \leq S'_{M-1} + \frac{3}{2}S_n \quad (**)$$

Supposons $\sum u_n$ converge et soit S sa somme alors on a

$$S'_n \leq S'_{M-1} + \frac{3}{2}S, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Comme S'_{M-1} est constante alors (S_n) est majorée donc converge par suite $\sum v_n$ converge. Supposons maintenant $\sum v_n$ converge et soit S' sa somme. Alors on a

$$S_n \leq S_{M-1} + 2S', \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc (S_n) est majorée donc converge. ■ **Attention** : Il convient de prendre garde au fait que, quand bien même $u_n \sim w_n$ pour n assez grand(w_n étant positif pour n assez grand), il n'ya l'équivalence

$$\sum_{k=n_0} u_k \sim \sum_{k=n_1} w_k$$

que si les séries de termes généraux $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(w_n)_{n\geq n_1}$ sont toutes deux diververgentes ; par exemple si $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}, \ n \geq 1$ et $w_n = \frac{1}{n^2}, \ n \geq 1$. On a bien sûr $u_n \sim w_n$, mais $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = 1 - \frac{1}{n+1}$ tend vers 1 tandis que la suite croissante $(w_n)_{n\geq 1}$ où $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ tend vers un nombre certainement supérieur à $1 + 1/4 = 5/4 > 1$.

Exercice 1.2.1 *Etudier la nature de la série $\sum u_n$ où*

$$u_n = \tan\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}, \ u_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Proposition 1.2.2 ***Règle*** $n^\alpha u_n$
Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes dans $\mathbb{R}_+$. S'il existe $\alpha \in]1, +\infty[$ tel que $n^\alpha u_n \to 0$ lorsque n tend vers l'infini, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Preuve. Comme $n^\alpha u_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ donc $\exists N \in \mathbb{N}^*, \ \forall n \geq N$ tel que $0 \leq n^\alpha u_n \leq 1$. Donc pour tout $n \geq N$ on a $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^\alpha}$. Comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge le théorème de comparaison entraine la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$. ■

Exemple 1.2.3 *Etudier la nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = e^{-(\ln n)^a}$ avec a un réel fixé.*

Réponse
Si $a > 1$ et $n > 1$ alors $\sum u_n$ converge.
-Si $a = 1$ $u_n = 1/n$ donc la série de terme général u_n est divergente.
-Si $a < 1, \ n \geq 3$ la série de terme général u_n est divergente.

Exemple 1.2.4 ***Série de Bertrand*** $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$
Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ fixé la série de bertrand converge si et seulement si $\alpha > 1$ pour tout β oubien $\alpha = 1$ et $\beta > 1$

En effet
Si $\alpha = 1$ considérons la fonction $f : [2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \ x \longmapsto \frac{1}{x \ln^\beta x}$.
La fonction f est continue, positive et décroissante. Donc $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^\beta x}$ et la série $\sum \frac{1}{n \ln^\beta n}$ sont de même nature. D'après le chapitre précédent la convergence de la série a lieu si et seulement si $\beta > 1$.
Soit β un réel quelconque.
Si $\alpha > 1$, $\lim_{n\longrightarrow+\infty} n^{\frac{\alpha+1}{2}} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} = 0$ donc $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ converge.
Si $\alpha < 1$, $\lim_{n\longrightarrow+\infty} n^{\frac{\alpha+1}{2}} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} = +\infty$ donc $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ diverge car $\alpha + 1/2 < 1$.

1.3 Séries à termes quelconques

1.3.1 Séries absolument convergentes

Définition 1.3.1 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}})$ une suite réelle ou complexe. On dit la série $\sum u_n$ est* ***absolument convergente*** *si et seulement si la série de terme général $|u_n|$ est convergente. Une série convergente mais non absolument convergente est dite* ***Semi-convergente****.*

Proposition 1.3.1 *Toute série absolument convergente est convergente et non réciproquement.*

Preuve. Par hypothèse $\sum |u_k|$ converge, donc $\forall \epsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N}$ tel que $|\sum_{k=n+1}^{p} u_k| \leq \epsilon$ dès que $N \leq n \leq p$. Donc $|\sum_{k=n+1}^{p} u_k| \leq \sum_{k=n+1}^{p} |u_k| \leq \epsilon$ pour tout $N \leq n \leq p$.
Donc la série $\sum u_n$ satisfait le critère de Cauchy pour les séries donc par conséquent converge. ■

Exemple 1.3.1 *Les séries de termes généraux $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$, $n \geq 2$ avec $\alpha > 1$ sont absoluments convergentes.*

Remarque 1.3.1 *Le théorème devient faux sans l'hypothèse de signe. En effet $\sum(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n})$ diverge tandis que $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge or $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \sim_{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.*

Définition 1.3.2 *Une série de terme général u_n est dite alternée si pour n assez grand u_n et u_{n+1} sont de signes contraires.*

Proposition 1.3.2 ***Critère des séries alternées***
Pour qu'une série alternée soit convergente, il suffit que $|u_n|$ tende vers zéro en décroissant quand n tend vers $+\infty$ et alors $R_n = |u_{n+1} + \ldots + u_{n+p} + \ldots| \leq |\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k| \leq |u_{n+1}|$ si $n \geq n_0$. R_n est appelé le reste d'ordre n de la série.

Exemple 1.3.2 *La série harmonique alternée de terme général de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $n \geq 1$ n'est pas absolument convergente.*
Cependant elle converge car si on considère la suite (S_n) des sommes partielles, on constate immédiatement que les segments $[S_{2p}, S_{2p+1}]$ sont emboités de longueur

$$S_{2p+1} - S_{2p} = \frac{1}{2p+1}$$

qui tend vers zéro lorsque p tend vers $+\infty$. Donc les suites S_{2p+1} et S_{2p} ont même limite l et c'est la somme de la série. $\sum u_n$ est donc convergente.

Exercice 1.3.1 *Montrer que la série alternée de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$, $(n \geq 1)$ est semi-convergente pour $\alpha \in]0, 1]$.*

Exemple 1.3.3 ***Série semi convergente***
Soit v_n la suite définie par $v_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \geq 1$. On a v_n tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. On pose $u_n = v_n - v_{n-1}$, $n \geq 1$.

$$\sum_{n=2}^{\infty} u_k = (v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + \ldots + (v_n - v_{n-1}) = v_n - v_1$$

La série de terme général $(u_n)_{n\geq 2}$ concue à partir de la suite convergente v_n est dite télescopique. Elle est bien convergente et de somme $-v_1$. En revanche on a $|u_n| = |v_n - v_{n-1}| = |(-1)^n/n + \frac{(-1)^n}{n-1}| = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} \geq \frac{1}{n}$. Comme la série de terme général $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ diverge, la série de terme général $|u_n|$ diverge aussi. Elle eest donc semi convergente.

1.4 Règles de Cauchy et d'Alembert

1.4.1 Règle de Cauchy

Proposition 1.4.1 *Soit u_n une suite de nombres réels positifs. Supposons $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.*

1. *Si $l < 1$, la série de terme général u_n converge.*

2. *Si $l > 1$ la série de terme général u_n diverge et dans ce u_n ne tend pas vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$.*

Preuve. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow (l+\epsilon)^n < u_n < (l+\epsilon)^n$.
1) Si $l < 1$ on choisit ϵ tel que $0 < l + \epsilon < 1$. La série $\sum (l+\epsilon)^n$ est alors convergente, ce qui entraine la convergence de $\sum u_n$. 2) Si $l > 1$ on choisit ϵ tel que $l - \epsilon > 1$. On aura $u_n > (l-\epsilon)^n > 1$. Ce qui entraine que $\lim_{n\to+\infty} \geq 1$ et par suite la série diverge.
■

Remarque 1.4.1 *Notons que ce critère de comparaison n'est pas assez puissant pour autoriser une conclusion dans le cas litigieux $l = 1$; parexemple si $u_n = \frac{1}{n^x}$, $x \in \mathbb{R}$ on a $u_n^{\frac{1}{n}} = \exp(-x\frac{\ln n}{n})$, d'où $\lim_{n\to+\infty} u_n^{\frac{1}{n}} = 1$, soit donc $l = 1$; cependant suivant $x > 1$ ou $x \leq 1$, il ya convergence ou divergence de la série de Riemann de terme général $(\frac{1}{n^x})_{n\geq 1}$*

1.4.2 Règle de D'Alembert

Proposition 1.4.2 *Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites à termes réel positifs. On suppose qu'il existe N $\forall n \geq N$,*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

Alors

$$u_n = o(v_n).$$

Théorème 1.4.1 *Soit u_n une suite de nombre réels ou complexes. Supposons*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L.$$

Si $L < 1$, la série de terme général u_n converge.
Si $L > 1$, la série de terme général u_n diverge.

Preuve. 1) Supposons $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L < 1$ et posons $\lambda = \frac{L+1}{2}$ tel que $L < \lambda < 1$ et soit $\alpha_n = \lambda^n$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L < \lambda$ il existe N, $\forall n \geq N$ on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \lambda = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$$

donc $u_n = o(\alpha_n)$ d'après le critère de comparaison la série de terme général u_n converge.
2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L > 1$ donc $\exists N$, $\forall n \geq N \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ Donc u_n est croissante on a $\forall n \geq N$, $u_n \geq u_N > 0$ donc u_n ne tend pas vers zéro. Donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.
■

Exemple 1.4.1 *Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{n!}{n^n}$, $v_n = \frac{(2n)!}{n!n^n}$*

Proposition 1.4.3 *Soit $\sum_{n\geq n_0} u_n$ une série numérique à terme général strictement positif telle que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. On suppose que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})$$

lorsque n tend vers l'infini ; alors
- Si $\alpha > 1$, la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est convergente
- Si $\alpha < 1$, la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est divergente

1.4.3 Critère d'Abel

Proposition 1.4.4 *Soient (a_n) et (b_n) deux suites numériques qui vérifient les conditions suivantes :*

1. *$(b_n) \geq 0$ décroissante et tend vers zéro quand $n \to +\infty$*

2. *Il existe $M \in \mathbb{R}$, $M > 0, \forall\ n \in \mathbb{N}$ on a $|\sum_{0\leq k\leq n} a_k| \leq M$*
   Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n b_n)$ converge.

Preuve. Soit $\epsilon > 0$, puisque $(b_n) \to +0$, lorsque n tend vers $+\infty$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$ on a $|b_n| \leq \frac{\epsilon}{2M}$. Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_n$ donc $a_n = S_n - S_{n-1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$, $n_0 \leq n \leq m$

$$\Big|\sum_{k=0}^{m} a_k b_k - \sum_{k=0}^{n} a_k b_k\Big| = \Big|\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k| = a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \ldots + a_m b_m\Big|$$

$$= |(S_{n+1} - S_n)b_{n+1} + \ldots + (S_m - S_{m-1})b_m|$$

$$= | - S_n b_{n+1} + S_{n+1}(b_{n+1} - b_{n+2}) + \ldots + S_{m-1}(b_{m-1} - b_m) + S_m b_m|$$

$$\leq |S_n||b_{n+1}| + |S_{n+1}||(b_{n+1} - b_{n+2}| + \ldots + |S_{m-1}||(b_{m-1} - b_m| + |S_m||b_m|$$

$$\leq M(|b_{n+1}| + |b_{n+1} - b_{n+2}| + \ldots + |b_{m-1} - b_m| + |b_m|) \text{ car } |S_n| \leq M|\forall n \in \mathbb{N}$$

$$\leq M(|b_{n+1}| + b_{n+1} - b_{n+2} + \ldots + b_{m-1} - b_m + |b_m|), \text{ car } b_n \text{ est décroissante}$$

$$\leq M(b_{n+1} + b_{n+1} - b_{n+2} + \ldots + b_{m-1} - b_m + b_m), \text{ car } b_n \text{ est positif}$$

$$\leq M2b_{n+1}$$

$$\leq 2M.\frac{\epsilon}{2M} = \epsilon$$

Ainsi $\sum a_n b_n$ vérifie le critère de Cauchy des séries donc $\sum a_n b_n$ est convergente. ■

Exercice 1.4.1 *Etudier la convergence de la série* $\sum \frac{\sin kx}{k}$ *où* $x \in [0, \pi],\ k \geq 1$

Solution
Si $x \in \{0, \pi\}$ donc $\sin kx = 0\ \forall k \in \mathbb{N}$ ce qui entraine que $\sum \frac{\sin kx}{k}$ converge.
Si $x \in]0, \pi[$, $\sin kx \neq 0,\ \ \sin kx = Im(e^{ikx})$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = Im \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$$

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{i(n+1)x/2}(e^{-i(n+1)x/2} - e^{i(n+1)x/2})}{e^{ix/2}(e^{-ix/2} - e^{ix/2})}$$

$$= e^{inx/2}\frac{-2i\sin(n+1)x/2}{-2i\sin x/2} = e^{inx/2}\frac{\sin(n+1)x/2}{\sin x/2}$$

D'où

$$Im \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{\sin nx/2 \sin(n+1)x/2}{\sin x/2} = \sum_{k=1}^{n} \sin kx$$

donc

$$|\sum_{k=1}^{n} \sin kx| \leq \frac{1}{|\sin x/2|} \quad (1)$$

La suite $(\frac{1}{k})_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers zéro et est décroissante quand n tend vers l'infini (2)
(1) et (2) entraine d'après le critère d'Abel que la série $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}$ est convergente.

1.5 Série produit

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réels ou complexes. On associe à (u_n) et (v_n) la suite définie par :

$$\forall n,\ w_n = \sum_{p+q=n} u_q v_q = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-q} = \sum_{q=0}^{n} u_{n-q} v_q$$

Cette suite (w_n) est appelée **produit de convolution** ou **convolée** des suites (u_n) et (v_n).
La série $\sum w_n$ est appelée **série produit** des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Théorème 1.5.1 *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries absolument convergentes. Alors la série produit $\sum w_n$ des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ définie par $w_n = \sum_{p+q=n} u_q v_q$ est absolument convergente et sa somme*

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{\infty} a_n)$$

Preuve. Montrons que $\sum |c_n|$ est convergente. Posons

$$A'_n = |a_0| + \cdots + |a_n|; \quad B'_n = |b_0| + \ldots + |b_n|; \quad C'_n = |c_0| + \cdots + |c_n|.$$

$$A'_n B'_n = (\sum_{p=0}^{n} |a_q|)(\sum_{q=0}^{n} |b_q|) = \sum_{0\le l\le 2n} \sum_{l=p+q} |a_p||b_q|$$

$$= \sum_{0\le l\le n} \sum_{l=p+q} |a_p||b_q| + \sum_{n+1\le l\le 2n} \sum_{l=p+q} |a_p||b_q|$$

$$= \sum_{0\le p+q\le n} |a_p||b_q| + \sum_{n+1\le p+q\le 2n} |a_p||b_q|$$

$$C'_n = \sum_{0\le p+q\le n} |a_p||b_q| \quad (*)$$

$$C'_{2n} = \sum_{0\le p+q\le 2n} |a_p||b_q| \quad (*)$$

$$C'_n \le A'_n B'_n \le C'_{2n}$$

$$C'_n \le A'_n B'_n \le (\sum_{p=0}^{\infty} |a_p|)(\sum_{p=0}^{\infty} |b_p|)$$

donc la suite C'_n est majorée par $(\sum_{p=0}^{\infty} |a_p|)(\sum_{p=0}^{\infty} |b_p|)$ donc la suite $\sum_{n=0}^{\infty} |C'_n|$ converge et de plus on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |C'_n| \le (\sum_{p=0}^{\infty} |a_p|)(\sum_{p=0}^{\infty} |b_p|)$$

De la relation $A'_n B'_n \leq C'_{2n}$ on en déduit que

$$A.B = \lim_{n\to+\infty} A'_n B'_n \leq \lim_{n\to+\infty} C'_{2n} \leq A.B$$

Donc

$$(\sum_{p=0}^{\infty} |a_p|)(\sum_{p=0}^{\infty} |b_p|) \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$$

$\sum |c'_n|$ converge et

$$\sum |c'_n| = (\sum_{p=0}^{\infty} |a_p|)(\sum_{p=0}^{\infty} |b_p|)$$

Montrons maintenant que

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{0}^{\infty} b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

Posons

$$A_n = a_0 + \ldots + a_n; \quad B_n = b_0 + \ldots + b_n; \quad C_n = c_0 + \ldots + \ldots + c_n.$$

$$A_n B_n = \sum_{0\leq p+q\leq n} a_p b_q + \sum_{n\leq p+q\leq 2n} a_p b_q$$

$$A_n B_n - C_n = \sum_{n<p+q<2n, p\leq n, q\leq n} a_p b_q$$

$$|A_n B_n - C_n| \leq \Big| \sum_{n<p+q<2n, p\leq n, q\leq n} a_p b_q \Big| \leq \sum_{n<p+q<2n, p\leq n, q\leq n} |a_p||b_q| = A'_n B'_n - C'_n$$

Or on vient de montrer que $A'_n B'_n = \lim_{n\to} C'_n$ on en déduit que $\lim_{n\to}(A'_n B'_n - C'_n) = 0$ ie

$$(\sum_{0}^{\infty} a_n)(\sum_{0}^{\infty} b_n) = \sum_{0}^{\infty} c_n$$

■

Exercice 1.5.1 *Soient $a \in [0, 1[$. Ecrire $\frac{1}{(1-a)^2}$ comme produit de deux séries. En déduire la somme de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} ka^k$. Calculer par la même méthode $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 a^k$.*

1.6 Exercices

Exercice 1.6.1 *Etudier la convergence de la série de terme général*

$$U_n = \ln(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

où α est un réel positif.

Solution
Cas 1 Si $\alpha > 1$ $|U_n| \sim \frac{1}{n^\alpha}$ d'après le critère de Riemann la série de terme général U_n converge absolument donc est convergente.
Cas 2 $0 < \alpha \leq 1$
On ne peut pas utiliser le crière d'équivalence U_n n'est pas à signe constant.
Comme $\alpha > 0$, $\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \longrightarrow 0$ donc le développement limité donne $U_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o(\frac{1}{n^{2\alpha}})$ qui converge si $\alpha > \frac{1}{2}$.
Donc la série de terme général U_n converge si $\alpha > 1$, semi-converge si $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ et diverge si $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$.

Exercice 1.6.2 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive et décroissante. On suppose de plus que la série de terme général u_n converge. On pose $v_n = n(u_n - u_{n+1})$.*
1) Etudier la nature de la série de terme général v_n.
2) Calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} kr^k$ pour $0 \leq r < 1$.

Solution :
La suite u_n est positive et décroissante d'où $u_n - u_{n+1} \geq 0$ donc v_n est une suite à termes positifs.
Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et $S'_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$ donc $v_1 = u_1 - u_2$
$v_2 = 2u_2 - 2u_3$
$v_3 = 3u_3 - 3u_4$
$\vdots$
$v_{n-1} = (n-1)u_{n-1} - (n-1)u_n$
$v_n = nu_n - nu_n$

En faisant la somme membre à membre on a

$$v_1 + v_1 + \ldots + v_n = S'_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n - nu_{n+1} = S_n - nu_{n+1}$$

Comme $u_{n+1} \geq 0$, on a $S'_n \leq S_n$ donc S_n est majorée donc $\sum v_n$ converge. Soit l' sa limite et soit l la limite de $\sum u_n$. Donc $u_{n+1} \sim \frac{l-l'}{n}$ si $l \neq l'$ alors $\sum u_n$ diverge ce qui est absurde donc $l = l'$. d'où

$$\sum u_n = \sum v_n = \sum n(u_n - u_{n+1})$$

2)
Posons

$$u_k = \frac{r^k}{1-r}, \quad u_{k+1} = \frac{r^{k+1}}{1-r}$$

donc

$$u_k - u_{k+1} = r^k > 0$$

donc la suite u_k est décroissante.
D'après la question 1)

$$\sum_{k=1}^{\infty} kr^k = \sum_{k=1}^{\infty} k(u_k - u_{k+1} = r^k) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{1-r}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} kr^k = \frac{1}{1-r}\sum_{k=1}^{\infty} r^k = \frac{r}{(1-r)^2}$$

Exercice 1.6.3 *Etudier la nature de la série* $\sum U_n$ *où*

$$U_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n\sqrt{n}}}$$

Solution $|U_n| = \frac{1}{n^{1/2}}$ donc la série de terme général U_n n'est pas absolument convergente. Le développement limité donne $U_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$. La série $\sum U_n$ diverge.

Exercice 1.6.4 *Etudier les séries de termes général* U_n *dans chacun des cas suivants :*

$$U_n = (n\sin\frac{1}{n})^n; \quad U_n = \frac{1!+2!+\ldots+(n-1)!}{(n+2)!}, \quad U_n = \frac{n^n}{n!}$$

$$U_n = \frac{2^n}{n!}, \quad U_n = \frac{2n!}{n!n^n}$$

Exercice 1.6.5 *Soit* α *un réel positif.*
1) Montrer que la série de terme général $u_n = \sin(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ *est convergente.*
2) Soit la série de terme général $v_n = \sin(\frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{3\alpha}})$.
Posons $w_n = v_n - u_n$.
Montrer que la série de terme général w_n *est une série à termes positifs à partir d'un certain rang. Discuter suivant les valeurs du réel* α, *la nature de la série de terme général* w_n. *En déduire la nature de terme général* v_n.

Exercice 1.6.6 *Etudier suivant les valeurs du réel* α *la convergence, la convergence absolue et la semi-convergence de la série de terme général* $U_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha-(-1)^n}$

Exercice 1.6.7 *Soit* $\sum u_n$ *une série convergente à termes dans* $\mathbb{C}(n \geq 1)$. *On lui associe la série de terme général*

$$v_n = \frac{u_1+2u_2+\ldots+nu_n}{n(n+1)}$$

Montrer que la série $\sum v_n$*est convergente et a la somme que* $\sum u_n$
Indication*On pourra mettre* $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *sous la forme* $\frac{S_1+\ldots+S_n}{N+1}$ *et utiliser le lemme de Cesaro.*

Exercice 1.6.8 *Etudier la convergence de la série de terme général* U_n *dans les cas suivants : 1)* $U_n = \frac{n^n e^{-n+i\alpha n}}{n!}$ *2)* $U_n = (-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n}$

Exercice 1.6.9 *Soit* $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *continue et décroissante. Montrer que pour* $n \geq 2$

$$\int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)dt$$

2) Utiliser la question précédente pour donner un équivalent simple de $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.
3) Par une technique analoque aux questions précédentes, trouver un équivalent simple lorsque n *tend vers* $+\infty$ *de* $U_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{k}$ *et* $V_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, $\alpha > 1$.

Exercice 1.6.10 *Soit* $\alpha \in [0, +\infty[$
Etudier suivant les valeurs du réel α *la convergence, la convergence absolue et la semi-convergence de la série*

$$\sum_{n \geq 1} \ln(1 + \frac{(-1)^n}{2n^\alpha})$$

Exercice 1.6.11 *1) Enoncer pour les séries le théorème de comparaison avec une intégrale.*
2)Etudier la nature des séries de termes généraux suivants :

$$U_n = \frac{1}{n \ln n}, \ n \geq 2, \qquad V_n = \frac{1}{n(\ln n)^p}, \ n \geq 2 \ et \ p \ réel \ > 1$$

Exercice 1.6.12 *Soit* $\alpha > 0$. *On pose* $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha (n-k)^\alpha}$. *Etudier la convergence de la série* $\sum u_n$

Exercice 1.6.13 *Soit* $\sum u_n$ *une série convergente. On pose* $v_n = \frac{u_n}{1} + \frac{u_{n-1}}{2} + \ldots + \frac{u_0}{2^n}$.
1) Montrer que $v_n \to 0$ *lorsque* $n \to +\infty$.
2) Montrer que $\sum v_n$ *converge et donner sa valeur.*

Exercice 1.6.14 *On pose* $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$
a) Montrer que pour tout $n \geq 0$, *on a*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \cdot n!}. \tag{1.1}$$

En déduire que e est irrationnel.(Si e=a/q, appliquer la formule (1.1) avec $n = q$.

Exercice 1.6.15 *Soit* $0 < t < \pi$. *Etudier la nature de la série* $\sum U_n$ *où*

$$U_n = \frac{\sin nt}{\sqrt{n} - \cos nt}$$

Exercice 1.6.16 *Etudier la série de terme général u_n définie par*

$$u_n = \int_n^{n+1} \frac{\cos \pi x}{1+x} dx$$

On effectuera les changements de variables successifs $t = x - n$, $u = 1 - t$ pour voir que $\sum u_n$ est une série alternée.
Etudier la nature de la série de terme général u_n définie par

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}, \ \alpha > 0$$

Exercice 1.6.17 *Etudier la nature des séries de terme général*

$$u_n = \sin(1 - \cos(\ln(1 + \frac{1}{n^3}))), \ v_n = n(1 - \cos(\frac{1}{\sqrt{n}})), \ w_n = \frac{n+1}{\sqrt{n}} - \frac{n}{\sqrt{n+1}}$$

Exercice 1.6.18 *Etudier la nature de la série de terme général*

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2-1}$ et calculer la somme si elle converge. On trouvera les cœfficients α et β tels que

$$u_n = \frac{1}{n^2-1} = \frac{\alpha}{n-1} + \frac{\beta}{n+1}$$

Exercice 1.6.19 *Etudier la convergence de la série terme général $u_n = \frac{n^b}{n^2+n^a}$ selon les valeurs de a et de b.*

Exercice 1.6.20 *Donner la nature des séries suivantes*

$$\sum \frac{n!}{2^n}, \ \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \ln(1 + \frac{1}{n^2})$$

$$\sum_{n\geq 1} (1 - \exp(-\frac{1}{n})), \ \sum_{n\geq 1} \exp(\frac{1}{n}).$$

Exercice 1.6.21 *Soit α un réel positif.*
1) Montrer que la série de terme général

$$u_n = \sin(\frac{(-1)^n}{n^\alpha})$$

est convergente.
2) Soit la série de terme général

$$v_n = \sin(\frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{3\alpha}}).$$

Posons $w_n = v_n - u_n$.
Montrer que la série de terme général w_n *est une série à termes positifs à partir d'un certain rang. Discuter suivant les valeurs du réel* α, *la nature de la série de terme général* w_n. *En déduire la nature de terme général* v_n.

Exercice 1.6.22 *Etudier suivant les valeurs du réel* α *la convergence, la convergence absolue et la semi-convergence de la série de terme général*

$$U_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha - (-1)^n}$$

Exercice 1.6.23 *Soit* $\sum u_n$ *une série convergente à termes dans* $\mathbb{C}(n \geq 1)$. *On lui aqssocie la série de terme général*

$$v_n = \frac{u_1 + 2u_2 + \ldots + nu_n}{n(n+1)}$$

Montrer que la série $\sum v_n$*est convergente et a la somme que* $\sum u_n$
Indication*On pourra mettre* $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *sous la forme* $\frac{S_1+\ldots+S_n}{N+1}$ *et utiliser le lemme de Cesaro.*

Exercice 1.6.24 *Etudier la convergence de la série de terme général* U_n *dans les cas suivants :*

$$U_n = \frac{n^n e^{-n+i\alpha n}}{n!}$$

$$U_n = (-1)^n \sqrt{n} \sin \frac{1}{n}$$