Cours D'Analyse3 L2 MPCI-SID

Par **Dr Ibrahima FAYE, Maître de Conférences**,
Université Alioune Diop de Bambey

2013-2014

Table des matières

Chapitre 1

Intégrales Généralisées

On considère une fonction f intégrable au sens de Riemann surtout intervalle fermé strict d'un intervalle ouvert $]a, b[$(par exemple f continue sur $]a, b[$) et on se demande si on peut donner un sens à la quantité $\int_a^b f(x)dx$. Cette intégrale sera appelée intégrale généralisée de f sur $]a, b[$. L'une des bornes a ou b peut être infini ou les deux en même temps. Dans la suite on s'intéressera à l'étude de l'intégrale généraliséE de f.

1.1 Définitions et exemples

Définition 1.1.1 *Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. Une fonction numérique $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **localement intégrale** sur I, si sa restriction à chaque intervalle fermé de I est Riemann intégrable.*

Définition 1.1.2 *1)Soit $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $-\infty \leq a < b < +\infty$ une fonction localement intégrable. On dira que l'intégrale de f sur $]a, b]$ est **convergente** ou f est **intégrable** si la fonction G définie sur $]a, b]$ par*
*$G(x) = \int_x^b f(t)dt$, admet **une limite finie** lorsque x tend vers a.*

En cas d'existence cette limite est appelée intégrale généralisée de f sur $]a, b]$ et est notée

$$\int_a^b f(t)dt = lim_{x\to a} \int_x^b f(t)dt.$$

*Si cette limite n'existe pas dans $\mathbb{R}$, on dit que l'intégrale de f sur $]a, b]$ est **divergente**.*
2)Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$, $-\infty < a < b \leq +\infty$ une fonction localement intégrable.
*On dira que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est **convergente** ou f est **intégrable** si la fonction F définie sur $[a, b[$ par*
*$F(x) = \int_a^x f(t)dt$, admet **une limite finie** lorsque x tend vers b.*
L'intégrale généralisée de f sur $[a, b[$ est alors le nombre réel $\int_a^b f(t)dt = lim_{x\to b} \int_a^x f(t)dt$.

Exemple 1.1.1 *Les intégrales de Riemann*
Une famille importante d'intégrales généralisées est donnée par celle des intégrales de Riemann.

Théorème 1.1.1 *Soit α un réel et f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :*

$$f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}.$$

1. *L'intégrale de f sur $[1, +\infty[$ est convergente si et seulement si, $\alpha > 1$ avec*

$$\forall \alpha > 1, \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

2. *L'intégrale de f sur $]0, 1]$ est convergente si et seulement si, $\alpha < 1$ avec*

$$\forall \alpha < 1, \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Preuve. *1. Pour tout $x > 1$, Calculons d'abord*

$$\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1) \ si\ \alpha \neq 1, \\ \ln(x) \ si\ \alpha = 1, \end{cases} \tag{1.1}$$

et

$$lim_{x \to +\infty} \int_1^x f(t)dt = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} \ si\ \alpha > 1 \\ +\infty \ si\ \alpha \leq 1 \end{cases} \tag{1.2}$$

De même pour $0 < x < 1$ on a

$$\int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}(1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}}) \ si\ \alpha \neq 1, \\ -\ln(x) \ si\ \alpha = 1 \end{cases} \tag{1.3}$$

et

$$\lim_{x \to 0} \int_x^1 f(t)dt = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} \ si\ \alpha < 1 \\ +\infty \ si\ \alpha \geq 1 \end{cases} \tag{1.4}$$

■

Remarque 1.1.1 *En conclusion $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est divergente quel que soit le réel α.*

Exemple 1.1.2 *Soit à calculer $\int_1^{+\infty} \cos t dt$. On a $\int_1^x \cos t dt = [\sin t]_1^x = \sin x - sin 1$ qui n'a pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$. donc $\int_1^{+\infty} \cos x dx$ est une intégrale divergente.*

Définition 1.1.3 *Soit $f\ :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ une fonction numérique localement intégrale. Soit $c\in]a,b[$. On dit que l'intégrale de f sur $]a,b[$ est convergente si chacune des intégrales $\int_a^c f(x)dx$ et $\int_c^b f(x)dx$ est convergente et on pose*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Remarque 1.1.2 *Cette définition est indépendante du point c.*

Exemple 1.1.3 *Soit à calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$.*
$\forall\, c \in]-\infty,+\infty[, \int_{-\infty}^{c} \frac{dt}{1+t^2} = [Arctgt]_{-\infty}^{c} = arctgc + \frac{\pi}{2}$.
$\int_c^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [Arctgt]_c^{+\infty} = -arctgc + \frac{\pi}{2}$.
On en déduit donc que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \int_{-\infty}^{c} \frac{dt}{1+t^2} + \int_c^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

Proposition 1.1.1 *Soit f une fonction localement intégrable sur $]a,b[$. Pour que l'intégrale de f sur $]a,b[$ soit convergente il faut et il suffit que la fonction à deux variables*

$$h(x,y) = \int_x^y f(t)dt,\ a < x < y < b$$

ait une limite finie lorsque $(x,y) \to (a,b)$ dans $\mathbb{R}^2$ et dans ce cas on a

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{(x,y)\to(a,b)} \int_x^y f(t)dt$$

En particulier si f est localement intégrable sur $]-\infty,+\infty[$ l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ existe équivaut à l'existence de $\lim_{A\to+\infty, A'\to-\infty} \int_{A'}^{A} f(t)dt$ avec A et A' indépendants.

Remarque 1.1.3 *Il peut exister $\lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} f(t)dt$ sans pour autant que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ existe.*
Pour s'en convaincre considérer $\int_{-a}^{a} sintdt = 0$ et $\lim_{a\to+\infty a'\to-\infty} \int_a^{a'} \sin tdt$ qui n'existe pas

Exercice 1.1.1 *1. Montrerque l'intégrale de $f : t \mapsto e^{-t}$ est convergente sur $[0,+\infty[$ et que $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$.*
2. Montrer que l'intégrale de $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est convergente sur $]0,1]$ et $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2$
3. Montrer que l'intégrale de $f : t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est divergente sur $]0,1]$
4. Montrer que l'intégrale de $f : t \mapsto \sin t$ est convergente sur $[0,+\infty[$.

Solution 1.1.1
1. Pour tout $x > 0$ on a :

$$F(x) = \int_0^x e^{-t}dt = 1 - e^{-x} \to 1_{x\to+\infty} = 1.$$

2. Pour tout $x \in]0,1]$ on a

$$F(x) = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2 - 2\sqrt{x} \to 2_{x\to 0}2.$$

3. Pour tout $x \in]0,1]$ on a :

$$F(x) = \int_x^1 \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{x} - 1 \to_{x\to 0^+} +\infty.$$

4. Pour tout $x > 0$ on a :

$$F(x) = \int_0^x \sin t dt = 1 - \cos x$$

et la fonction n'a pas de limite en $+\infty$.

1.2 Calcul d'intégrales généralisées

1.2.1 Utilisation d'une primitive

Soit $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si f admet une primitive sur $]a,b[$, la convergence de $\int_a^b f(t)dt$ équivaut à l'existence des deux limites $F(a+) = \lim_{x\to a, x>a} F(x)$ et $F(b-) = \lim_{x\to b, x<b} F(x)$ et si ces limites existent on a

$$\int_a^b f(t)dt = F(b-) - F(a+).$$

Exercice 1.2.1 *Calculer les intégrales* $I = \int_0^{+\infty} \exp(-ax)\cos(bx)dx$ *et* $J = \int_0^{+\infty} \exp(-ax)\sin(bx)dx$ *avec* $a > 0$.

Exercice 1.2.2 *Calculer les intégrales généralisées suivantes :*

$$a) \int_0^\infty \frac{dx}{(1+e^x)(1+e^{-x})},\ b) \int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx,\ c) \int_0^1 \ln x\, dx \quad d) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2x\, dx}{\sqrt{2x}}.$$

1.2.2 Changement de variables

Proposition 1.2.1 *Soit* $\varphi :]a,b[\longrightarrow]\alpha,\beta[$ *une bijection continument dérivable et soit* $f :]\alpha,\beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue. Pour que l'intégrale de* f *sur* $]\alpha,\beta[$ *soit convergente il faut et il suffit que l'intégrale de* $(f o\varphi)\varphi'$ *le soit sur* $]a,b[$ *et dans ce cas on a*

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Exercice 1.2.3 *Calculer* $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Solution 1.2.3
Posons x=1/t,

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\int_1^0 \frac{1}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} \frac{1}{t^2}dt$$

$$= -\int_1^0 \frac{1}{t\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = arcsint]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 1.2.4 *Montrer que l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}+t^2}dt$ *converge et calculer sa valeur.*

Solution 1.2.4
En posant $t = u^2$ on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}+t^2}dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^3}$$

et une décomposition en éléments simple donc $I = \frac{4}{9}\sqrt{3}\pi$.

1.2.3 Intégration par parties

Théorème 1.2.1 *Soient* u, v $:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions continument dérivables(*$\in \mathcal{C}^1$*) telles que* $A = lim_{x\to a+}u(x)v(x)$ *et* $B = lim_{x\to b-}u(x)v(x)$ *existent. Si l'une des intégrales* $\int_a^b u(x)v'(x)dx$ *ou* $\int_a^b u'(x)v(x)dx$ *est convergente il est est de même de l'autre et on a*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = B - A - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Preuve. Le théorème d'intégration par parties permet d'écrire pour tout $x < y \in]a,b[$:

$$\int_x^y f(t)g'(t)dt = f(y)g(y) - f(x)g(x) - \int_x^y f'(t)g(t)dt.$$

et faisant d'abord tendre y vers b on a

$$\int_x^b f(t)g'(t)dt = B - f(x)g(x) - \int_x^b f'(t)g(t)dt.$$

De même en faisant tendre x vers a on obtient le résultat. ■

Exemple 1.2.1 *Calculer l'intégrale* $I = \int_0^1 \frac{\log x}{1+x^2}dx$.
$I = \int_0^1 (\log x)darctgx = (\log x)arctgx]_0^1 - \int_0^1 \frac{arctgx}{x}dx = -\int_0^1 \frac{arctgx}{x}dx$

Exercice 1.2.5 *Calculer les intégrales généralisées suivantes*

$$a)\ \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx, \quad b)\ \int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2}, \quad c)\ \int_0^1 \ln x\, dx.$$

Solution 1.2.5
b) En intégrant par parties on a pour tout $x \in]0,1]$

$$F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt = \Big[- \frac{\ln t}{1+t} \Big]_x^1 + \int_x^1 \frac{dt}{t(1+t)}$$

$$= \Big[\ln\Big(\frac{t}{(1+t)}\Big) - \frac{\ln t}{1+t} \Big]_x^1$$

$$-\ln 2 - \ln\Big(\frac{x}{1+x}\Big) + \frac{\ln x}{1+x} \to_{x\to 0} -\ln 2.$$

Exercice 1.2.6 *Montrer que $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente et calculer sa valeur pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Solution 1.2.6
On a $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$ et une intégration par parties nous montre que $I_{n+1} = (n+1) I_n$, ce qui donne $I_n = n!$

Exercice 1.2.7 *Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l'$.*

1. *Existence et calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t+1) - f(t)) dt$.*

2. *Calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} (arctan(t+1) - arctan(t)) dt$.*

Solution 1.2.7 :
1. En notant $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ pour $x > 0$ et en utilisant le théorème des accroissements finis, on a

$$\int_0^x (f(t+1) - f(t)) dt = [F(t+1) - F(t)]_0^x = F(x+1) - F(x) - F(1) = f(c_x) - F(1)$$

où $c_x \in]x, x+1[$. Et en faisant tendre x vers $+\infty$ on en déduit que :

$$\int_0^{+\infty} (f(t+1) - f(t)) dt = F(1) - l$$

et

De manière analogue, on vérifie que

$$\int_{-\infty}^0 (f(t+1) - f(t)) dt = l' - F(1).$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t+1) - f(t))dt = l - l'.$$

2. $f(t) = arctant \rightarrow_{t\to\pm\infty} \pm\frac{\pi}{2}$, on en déduit que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (arctan(t+1) - arctanf(t))dt = \pi.$$

Exercice 1.2.8 *Soit λ un nombre complexe. Etudier la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{\lambda x}dx$ en précisant sa valeur en cas de convergence.*

Solution 1.2.8
Soit F la primitive de f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_0^x e^{\lambda t}dt = \begin{cases} x \text{ si } \lambda = 0 \\ \frac{e^{\lambda x}-1}{\lambda} \text{ si } \lambda \neq 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

Pour $\lambda = 0$, on a $\lim_{\to+\infty} F(x) = +\infty$ et l'intégrale diverge.
Pour $Re(\lambda) > 0$, on a :

$$|F(x)| = \left|\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\right||1 - e^{-\lambda x}| \geq \left|\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\right||1 - |e^{-\lambda x}|| = \frac{e^{Re(\lambda)x}}{|\lambda|}(1 - e^{-Re(\lambda)x}) \rightarrow_{x\to+\infty} +\infty$$

et l'intégrale diverge.
Pour $Re(\lambda) < 0$, on a :

$$\left|\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\right| = \frac{e^{Re(\lambda)x}}{|\lambda|}| \rightarrow_{x\to+\infty} 0$$

et l'intégrale converge vers $-\frac{1}{\lambda}$. Il reste à considérer le cas où $Re(\lambda) = 0$, soit le cas où $\lambda = iy$ avec $y \in \mathbb{R}^*$. Dans ce cas l'intégrale diverge puisque la fonction $\varphi : x \mapsto e^{iyx}$ n'a pas de limite à l'infini.

1.3 Critères de convergences

1.3.1 Critère de Cauchy

Théorème 1.3.1 *Soit $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable. Alors $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si elle vérifie la propriété suivante dite de* ***Cauchy*** *:*
pour tout $\epsilon > 0$, $\exists\ \alpha > 0$ tels que pour tous points x, y de $]a, b]$ vérifiant la relation $0 < x - a < \alpha$ et $0 < y - a < \alpha$ alors

$$|\int_x^y f(t)dt| < \epsilon.$$

Preuve. Supposons que $\int_a^b f(t)dt$ convergente. donc la fonction $G(x) = \int_x^b f(t)dt$ admet une limite finie l lorsque x tend vers a. soit $\epsilon > 0$ tel que $0 < u - a < \alpha$, entraine $|\int_u^b f(t)dt - l| < \epsilon/2$. Si $0 < x - a < y - a < \alpha$, alors $\int_x^y f(t)dt = \int_x^b f(t)dt - \int_y^b f(t)dt$ d'où
$|\int_x^y f(t)dt| \leq |\int_x^b f(t)dt - l| + |\int_y^b f(t)dt - l| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$

Supposons maintenant que le critère de Cauchy soit vérifié. Soit x_n une suite quelconque tendant vers a lorsque n tend vers $+\infty$. La propriété de Cauchy implique que la suite $(G(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$, où $G(x_n) = \int_{x_n}^b f(t)dt$ est de Cauchy. Donc la suite $G(x_n)$ est convergente. Pour terminer la preuve il suffit simplement de montrer que

$$\int_a^b f(t)dt = l \text{ ie } G(x_n) \to \int_a^b f(t)dt \diamondsuit$$

■

Exercice 1.3.1 *Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable. Enoncer le critère de Cauchy pour l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$.*

1.3.2 Intégrale de fonctions positives

Soit f une fonction numérique positive localement intégrable sur $[a, b[$. La fonction $x \longmapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est croissante.
La fonction F admet une limite finie en $b-$ si et seulement si elle est majorée sur $[a, b[$ ie $\exists M \geq 0$ tels que $\forall x \in [a, b[$, on a $\int_a^x f(t)dt \leq M$.

Proposition 1.3.1 *Si f est a valeurs positives et si $\int_a^b f(x)dx$ converge, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.*
Dans le cas où f est continue sur $[a, b[$, l'égalité $\int_a^b f(x)dx = 0$ est réalisée si, et seulement si, f est identiquement nulle.

Proposition 1.3.2 *Soit f une fonction positive localement intégrable sur $[a, b[$. Alors $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si $\exists M > 0 : \forall x \in [a, b[$,*
$\int_a^x f(t)dt \leq M$ et dans ce cas
$\int_a^b f(t)dt = \sup_{a\leq x<b} \int_a^x f(t)dt$

On rappelle que si F est croissante de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ elle admet une limite finie en b si, et seulement si, elle est majorée. Dans le cas où elle est majorée, on a

$$\lim_{x\to b} F(x) = \sup_{x\in[a,b[} F(x)$$

et dans le cas contraire, on a $\lim_{x\to b} F(x) = +\infty$.

Preuve. $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ Si $a \leq x < x' < b$, alors comme $f \geq 0$ $\int_x^{x'} f(t)dt \geq 0$ donc $F(x') = \int_a^{x'} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x'} f(t)dt \geq \int_a^x f(t)dt = F(x)$. Donc F est croissante.

$\lim_{x\to b-} F(x)$ existe et cette limite est finie si et seulement si F est bornée supérieurement. Par conséquent
$\int_a^b f(x) = \lim_{x\to b-} F(x) = \sup_{a\leq x<b} \int_a^x f(t)dt.$ ■

Proposition 1.3.3 ***Critère de comparaison***
Soient f et g deux fonctions numériques positives localement intégrables sur $[a,b[$ et telles que $f(x)\leq g(x)$ alors
1)Si $\int_a^b g(x)dx$ converge,il en est de même de $\int_a^b f(x)dx$
2)Si $\int_a^b f(x)dx$ diverge il en est de $\int_a^b g(x)dx$

Preuve. En notant $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ et $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ pour tout $x\in [a,b[$, on a $F(x)\leq G(x)$ pour tout $x\in [a,b[$.
Si l'intégrale de g sur $[a,b[$ est convergente la fonction G est bornée et il en est de même de la fonction Fvde sorte que l'intégrale de f sur $[a,b[$ est convergente.
Si l'intégrale de f sur $[a,b[$ diverge alors $\lim_{x\to b} F(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to b} G(x) = +\infty$ de sorte que l'intégrale de g sur $[a,b[$ est aussi divergente. ■

Exercice 1.3.2 *Calculer l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{x^3}dx$.*

Solution 1.3.2 $\forall x\geq 1$, on a $0\leq \frac{\sqrt{\ln x}}{x^3}\leq \frac{1}{x^{5/2}}$. Or $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{5/2}}$ converge donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{x^3}dx$ aussi d'après le critère de comparaison.

Exercice 1.3.3 *Etudier la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^3}dx$.*

1.3.3 Critères d'équivalence

Proposition 1.3.4 *Soient f, g deux fonctions positives localement intégrables définies de $[a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$.*
Si f est équivalente à g en b, alors les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

Preuve. Supposons $f\sim_b g$ ce qui implique $g(t) = f(t)(1+\varepsilon(t))$ avec $\lim_{t\to b}\varepsilon(t) = 0$. Comme $\lim_{t\to b}\varepsilon(t) = 0$, $\exists\alpha>0,\ 0<b-t<\alpha$, on a $|\varepsilon(t)|<1/2$. Ce qui entraine donc que $\frac{1}{2}f(t)\leq g(t)\leq \frac{3}{2}f(t)$.
Soient x,y deux éléments de $[a,b[$ tel que $0<b-y<b-x<\alpha$ on a

$$1/2\int_x^y f(t)dt \leq \int_x^y g(t)dt \leq \frac{3}{2}\int_x^y f(t)dt$$

Supposons que $\int_a^b f(t)dt$ soit convergente. D'après la propriété de Cauchy on a $\forall\epsilon>0, \exists\delta>0$ tel que si $0<b-y<b-x<\delta$, on a

$$|\int_x^y f(t)dt| = \int_x^y f(t)dt < \epsilon$$

Posons $\beta = \inf(\delta, \alpha)$ Si $0 < b - y < b - x < \beta$, on a

$$|\int_x^y g(t)dt| \leq \frac{3}{2}\int_x^y f(t)dt < \frac{3}{2}\epsilon$$

donc $\int_a^b g(t)dt$ vérifie le critère de Cauchy par suite elle converge.
On montre aussi de la même manière que si $\int_a^b g(t)dt$ est convergente alors $\int_a^b f(t)dt$ est aussi convergente.
Pour le cas $b = +\infty$ on procédera aussi de la même manière. ■

Exemple 1.3.1 *Calculer l'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$.
Au voisinage de l'infini on a $\frac{1}{x(x+1)} \sim \frac{1}{x^2}$. *Or* $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ *converge d'après le critère de Riemann donc d'après le critère d'équivalence* $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$ *converge.*
Mais par contre on remarque que les deux intégrales n'ont pas la même valeur. En effet on a $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$ *et* $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)} = \ln 2$.

Exercice 1.3.4 *Montrer que les intégrales suivantes convergent :*

$$a) \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x^2+x+1}} dx, \ b) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln(1 + \sin x) dx.$$

Solution 1.3.4
a) Au voisinage de 0 :
$\frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x^2+x+1}} \sim \frac{e^{-1}}{\sqrt{x}}$ donc par le critère de comparaison $\int_0 \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x^2+x+1}} dx$ converge car $\int_0 \frac{e^{-1}}{\sqrt{x}}$ converge.
Au voisinage de $+\infty$:
$\frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x^2+x+1}} \leq e^{-x}$ donc $\int^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x^2+x+1}} dx$ converge par comparaison car $\int^{+\infty} e^{-x} dx$ converge.
b)Au voisinage de $-\pi/2$ posons $u = x + \pi/2$.

$$\ln(1 + \sin x) = \ln(1 - cosu) = \ln(u^2 + o(u^2)) \sim 2 \ln u$$

Comme $\int_0 \ln u \, du$ converge donc $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln(1 + \sin x) dx$.

Proposition 1.3.5 *Soit* $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ *une fonction localement intégrable. On suppose qu'il existe* γ, $\gamma < 1$ *et un réel* l *tel que*

$$\lim_{t \to b} (b - t)^{\gamma} f(t) = l$$

alors $\int_a^b f(t)dt$ *converge.*
Dans le cas où$\gamma \geq 1$ *et* $l \neq 0$, *alors l'intégrale n'existe pas ou est divergente.*

Proposition 1.3.6 *Soit $f : [a, +\infty[$ une fonction localement intégrable. On suppose qu'il existe $\gamma,\ \gamma > 1$ et un réel l tels que*

$$\lim_{t \to +\infty} t^\gamma f(t) = l.$$

Alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.
Dans le cas où $\gamma \leq 1$ et $l \neq 0$ alors l'intégrale $\int_a^{+\infty}$ n'existe pas.

Exercice 1.3.5 *Montrer que l'intégrale converge $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$.*

Solution 1.3.5 :
La fonction étant paire, il suffit d'étudier la convergence en $+\infty$. On a pour tout $t \geq 1,\ t^2 \geq t$ et

$$\begin{aligned} F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt &= \int_0^1 xe^{-t^2} dt + \int_1^x xe^{-t^2} dt \\ &\leq \int_0^1 xe^{-t^2} dt + \int_1^x xe^{-t} dt \leq \int_0^1 xe^{-t^2} dt + 1. \end{aligned}$$

La fonction étant positive, il en résulte que F est croissante et majorée, elle admet donc une limite en $+\infty$.

Exercice 1.3.6 *Calculer* ***l'intégrale de Bertrand***

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}.$$

Solution 1.3.6 Soit β un réel quelconque.
Si $\alpha > 1$, $\lim_{x \longrightarrow +\infty} x^{\frac{\alpha+1}{2}} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} = 0$ donc d'après la proposition précédente $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ converge car $\frac{\alpha+1}{2} > 1$.
Si $\alpha < 1$, $\lim_{x \longrightarrow +\infty} x^{\frac{\alpha+1}{2}} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} = +\infty$ donc d'après la proposition précédente $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ diverge car $\frac{\alpha+1}{2} \leq 1$.
Si $\alpha = 1$, on $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{x \ln^\beta x} dx$ converge si $\beta > 1$.
En conclusion $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ converge

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1,\ \beta \in \mathbb{R} \\ \alpha = 1,\ \beta > 1 \end{cases}$$

1.4 Convergence absolue et Semi-convergence

Définition 1.4.1 *Soit f une fonction numérique localement intégrable sur un intervalle de la forme $I = [a, b[$. On dit que l'intégrale de f sur I est* ***absolument convergente*** *si l'intégrale $\int_a^b |f(t)|dt$ est convergente.*

Exercice 1.4.1 *Pour* $\alpha > 1$, $\int_\pi^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ *est absolument convergente.*

Solution ?? ($|\frac{\sin t}{t^\alpha}| \leq \frac{1}{t^\alpha}$) et $\int_\pi^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge car $\alpha > 1$ donc $\int_\pi^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ est absolument convergente.

Proposition 1.4.1 *Soit* $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction localement intégrable. Si l'intégrale de* f *est absolument convergente, alors l'intégrale de* f *est convergente.*

Preuve. Puisque $\int_a^b |f| dx$ est convergente, $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0$ tels que
$0 < b - y < \alpha$ et $0 < b - x < \alpha$ entraine
$|\int_x^y |f(t)| dt| = \int_x^y |f(t)| dt < \epsilon$ donc $|\int_x^y f(t) dt| < \epsilon$.
ϵ étant quelconque $\int_a^b f(t) dt$ converge d'après le critère de Cauchy. ■

Définition 1.4.2 *On dit que* $\int_a^b f(t) dt$ *est* ***semi-convergente*** *si elle est convergente sans être absolument convergente*

Exercice 1.4.2 *Montrer que les intégrales suivantes sont semi-convergentes :*

$$a) \int_\pi^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx \;\; b) \int_{-1}^\infty \cos(x^2) dx (poser\ u = x^2, \;\; c) \int_\pi^\infty x^2 \sin(x^4) dx.$$

Solution 1.4.2

$$a) \int_\pi^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \left[\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right]_\pi^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx.$$

Or on a $\frac{\sin x}{x^{3/2}} \leq 1/x^{3/2}$. Comme $\int^\infty \frac{1}{x^{3/2}} dx$ converge donc $\int \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx$ converge. Par suite $\int_\pi^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$. Pour montrer qu'elle ne converge pas absolument, on peut utiliser l'inégalité $|\cos x| \geq \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$. Alors

$$\int_\pi^\infty \frac{|\cos x|}{\sqrt{x}} dx \geq \int_\pi^x \frac{1 + \cos 2t}{2\sqrt{t}} dt = \underbrace{\int_\pi^x \frac{dt}{2\sqrt{t}}}_{\text{diverge}} + \underbrace{\int_\pi^x \frac{\cos 2t \; dt}{2\sqrt{t}}}_{\text{converge}}$$

Donc

$$\int_\pi^\infty \frac{|\cos x|}{\sqrt{x}} dx \text{ est divergente.}$$

Exercice 1.4.3 *Montrer que pour* $0 < \alpha \leq 1$ *l'intégrale* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}$ *est semi-convergente.*

Solution 1.4.3 : Les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}$ sont convergentes pour $\alpha > 0$.
Comme pour $t \geq 1$ et $0 < \alpha \leq 1$, on a $|\frac{\sin t}{t^\alpha}| \geq |\frac{\sin t}{t}|$ qui résulte du fait que $t \geq t^\alpha$, il suffit de montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est semi convergente.
Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \geq 1, \;\; x_n = n\pi$.
Pour n_geq1, le changement de variable $t = n\pi + u$ nous donne

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = \int_0^\pi \frac{\sin u}{n\pi + u} du \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^\pi \sin u du = \frac{2}{(n+1)\pi}$$

et $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = +\infty$, ce qui entraine la divergence de $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$.

Exemple 1.4.1 *Exemple d'intégrale semi-convergente*

$$I = \int_1^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

En faisant une intégration par parties on a :

$$\begin{aligned} I = \int_1^{\infty} \frac{d(\cos t)}{t} dt &= -\frac{\cos t}{t}]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt \\ &= -\cos 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt \end{aligned}$$

or $|\frac{\cos t}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2}$ *et* $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ *converge donc* $\int_1^{+\infty} |\frac{\cos t}{t^2}| dt$ *converge parsuite* $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ *est convergente donc* $I = \int_1^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ *est convergente.*
Montrons dans ce qui suit que I *n'est pas absolument convergente. Nous allons montrer que* I *ne vérifie pas le critère de Cauchy.*
Pour tout $k \geq 0$ *on a*

$$\begin{aligned} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\frac{\sin t}{t}| dt &= \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t + k\pi} dt \text{ on pose } t = t - k\pi \\ &\geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin t dt \geq \frac{2}{(k+1)\pi} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{k\pi}^{(2k+2)\pi} |\frac{\sin t}{t}| dt &= \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\frac{\sin t}{t}| dt + \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} |\frac{\sin t}{t}| dt + \ldots + \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} |\frac{\sin t}{t}| dt \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t + k\pi} dt + \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t + (k+1)\pi} dt + \ldots + \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t + (2k+2)\pi} dt \\ &\geq \frac{2}{(k+1)\pi} + \frac{2}{(k+2)\pi} + \ldots + \frac{2}{(2k+2)\pi} \geq \frac{2(k+1)}{(2k+2)\pi} = \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

Soit $\epsilon = \frac{1}{\pi}$, $\forall A > 0, \exists k \in \mathbb{N}$, $k\pi > A$ *et on a*

$$\int_{k\pi}^{(2k+2)\pi} |\frac{\sin t}{t}| dt \geq \epsilon$$

donc

$$I = \int_1^{+\infty} |\frac{\sin t}{t}| dt$$

ne vérifie pas le critère de Cauchy.

1.4.1 Critère d'Abel

Soient f et g deux fonctions numériques définies sur $[a, +\infty[$ telles que :
1) $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.
2) g monotone et bornée c'est à dire il existe $L > 0$ tel que $|g(x)| \leq L$, $\forall x \in [a, +\infty[$
Alors $\int_a^{+\infty} f(t)g(t)dt$ converge.

Proposition 1.4.2 ***Deuxième formule de la moyenne***
Soient $f, g : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables sur $[\alpha, \beta]$. On suppose f décroissante et positive.
Alors il existe $c \in [\alpha, \beta]$ tel que

$$\int_\alpha^\beta f(t)g(t)dt = f(\alpha + 0) \int_\alpha^c g(t)dt$$

où $f(\alpha + 0) = \lim_{t \to \alpha} f(t)$

Proposition 1.4.3 ***Critère d'Abel***
Soient $f, g : [a, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions localement intégrables. On suppose

1. *f est positive, décroissante et tend vers zéro quand t tend vers $+\infty$*

2. *Il existe $M \in \mathbb{R},\ M > 0$ tel que $\forall u, v \in [a, +\infty[$, $\left| \int_u^v g(t)dt \right| \leq M$.*

Alors $\int_a^{+\infty} f(t)g(t)dt$ est convergente.

Preuve. Soit $\epsilon > 0$, puisque $f(t)$ tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini, il existe A, quel que soit $t > A$ $0 \leq f(t) \leq \frac{\epsilon}{M}$.
Soient u, v tels que $A \leq u \leq v$, d'après la formule de la moyenne il existe $c \in [u, v]$ tel que $\int_u^v f(t)g(t)dt = f(u + 0) \int_u^c g(t)dt$ donc

$$\left| \int_u^v f(t)g(t)dt \right| = f(u + 0) \left| \int_u^c g(t)dt \right|$$

$$\leq f(u + 0)M \leq \frac{\epsilon}{M} M = \epsilon$$

ϵ étant quelconque donc $\int_a^{+\infty} f(t)g(t)dt$ vérifie le critère de Cauchy. ■

Exercice 1.4.4 *Montrer en utilisant le critère D'Abel que $\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$ converge.*

1.4.2 Critère de Dirichlet

Proposition 1.4.4 *Soit f une fonction localement intégrable sur $[A, +\infty[$ telle que :*

1. *Il existe $k > 0$, $\left| \int_a^A f(t)dt \right| \leq k \forall A \in [a, +\infty[$.*

2. g tend vers zéro de façon monotone quand $x \to \infty$.
Alors $\int_a^{+\infty} f(t)g(t)dt$

Remarque 1.4.1 *Le critère de Dirichlet entraine celui d'Abel.*

Remarque 1.4.2 *- Si $\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = l$ réel non nul ou $+\infty$ ou $-\infty$ alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge.*
- Si $\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = 0$ ou n'existe pas on ne peut rien dire quant à la nature de l'intégrale.

1.5 Exercices

Exercice 1.5.1 *Etudier la nature de l'intégrale généralisée*
1) $\int_0^{+\infty}(x + 2 - \sqrt{x^2 + 4x + 1})dx$
2)$\int_0^{+\infty}(\sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt{x^2 + 1})dx$
3)$\int_0^{+\infty}((x + 1)^{\frac{1}{x+1}} - x^{\frac{1}{x}})dx$
4) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$
5)$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}dx$
6)$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^\alpha(1+x^\beta)}$
Solution 1.5.1 *: 1)En multipliant par l'expression conjuguée on a :*
$x + 2 - \sqrt{x^2 + 4x + 1} = \frac{3}{x+2+\sqrt{x^2+4x+1}} \sim_{x\to+\infty} \frac{3}{2x}$ donc diverge car l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{3}{2x}$ diverge.
2) $\sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt{x^2 + 1} = x((1 + \frac{1}{x^3})^{1/3} - (1 + \frac{1}{x^2})^{1/2}) \sim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2x}$ Donc l'intégrale est divergente.
3) $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}} = 1 + \frac{\ln x}{x} + O((\frac{\ln x}{x})^2)$
De même on a $(x + 1)^{\frac{1}{x+1}} = e^{\frac{\ln(x+1)}{x+1} = e^{\frac{\ln x+\ln(1+1/x)}{x(1+1/x)}}} \sim e^{\frac{\ln x}{x}} = 1 + \frac{\ln x}{x} + O((\frac{\ln x}{x})^2)$
Donc $(x + 1)^{\frac{1}{x+1}} - x^{\frac{1}{x}} = O((\frac{\ln x}{x})^2)$ d'où l'intégrale converge.
4)$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ on a donc deux points de singularités 0 et $+\infty$.
Au voisinage de zéro $\frac{\sin x}{x^\alpha} \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}}$. Or $\int_0^c \frac{1}{x^{\alpha-1}}dx$ converge si $\alpha - 1 < 1$ d'après le critère de Riemann. Donc l'intégrale converge au voisinage de zéro si $\alpha < 2$
Au voisinage de $+\infty$ on a $|\frac{\sin x}{x^\alpha}| \leq \frac{1}{x^\alpha}$ Comme $\int_c^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge si $\alpha > 1$ alors $\int_c^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ est aussi convergent pour $\alpha > 1$.
Pour $0 < \alpha \leq 1$ on a quel que soit u et v $6\int_u^v \sin x dx| < 2$ et la fonction $\frac{1}{x\alpha}$ est positive décroissante et tend vers zéro quand n tend vers l'infini. D'après le lemme d'Abel $\int_c^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ est convergente.
En concluion : $\int_0^c \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ converge si $\alpha < 2$ et $\int_c^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ converge si $\alpha > 0$. Donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ converge si $0 < \alpha \leq 2$.

Exercice 1.5.2 *Déterminer la nature de l'intégrale impropres $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^3}$*

Solution 1.5.2 Pour étudier la convergence de l'intégrale nous allons étudier la convergen ce des deux intégrales suivantes

$\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x^3}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^3} dx$
Au voisinage de zéro on a
$\frac{\sin^2 x}{x^3} \sim \frac{1}{x}$ donc d'après le critère de Riemann l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x^3}$ diverge.
Pour tout $x \in [1, +\infty[$ on a $\frac{\sin^2 x}{x^3} \leq \frac{1}{x^3}$ donc d'après le critère de comparaison comme $\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x^3}$ est convergente alors $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^3} dx$ converge.
Comme la première est divergente donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^3}$ est divergente.

Exercice 1.5.3 *Etudier la convergence des deux intégrales* $I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx$ *et* $J = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x dx$. *Calculer* I *et* J.

Solution 1.5.3 : Etude de I
O est le seul point de singularité. Au voisinage de zéro on a $\sin x \sim x$ donc $\ln \sin x \sim \ln x$ au voisinage de zéro.
Donc $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx$ est de même nature que $\int_0^{\pi/2} \ln x dx$.
En faisant une une intégration par partie avec
$u = \ln x,\ du = \frac{1}{x} dx$ et $dv = dx,\ v = x$ on a
$\int_t^{\pi/2} \ln x dx = [x \ln x]_t^{\pi/2} - \int_t^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2} \ln \frac{\pi}{2} + t - t \ln t$
Lorsque t tend vers 0 $\int_t^{\pi/2} \ln x dx$ admet une limite finie. Donc $\int_0^{\pi/2} \ln x dx$ converge par suite I converge.
Pour l'intégrale J faisons le changement de variable
$t = \frac{\pi}{2} - x$, $dt = dx$ si $x = 0$, $t = \frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2}$, $t = 0$ $J = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x dx = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx = I$
Comme I converge par suite J converge et on a $I = J$.
$I + J = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx + \int_0^{\pi/2} \ln \cos x dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x \cos x) dx$
$= \int_0^{\pi/2} \ln(\frac{1}{2} \sin 2x) dx = \int_0^{\pi/2} (\ln \sin 2x - \ln 2) dx$
Posons $t = 2x$, $dt = 2dx$ d'où $I + J = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln \sin t dt - \frac{\pi \ln 2}{2} = I - \frac{\pi \ln 2}{2}$ par suite on a

$$I = J = -\frac{\pi \ln 2}{2}$$

Exercice 1.5.4 *Calculer les intégrales généralisées*

$$A) \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{x^3 + x^2 + x + 1} \quad B) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}$$

Solution 1.5.4
A)Nous allons faire une décomposition en élémente simples $x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^2+1)$ donc le rapport $\frac{x dx}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x+1}$ En identifiant on a a=1/2, b=1/2 ,c=-1/2
Soit $X > 1$

$$\int_0^X \frac{x dx}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{1}{2} \int_0^X \frac{(x+1) dx}{x^2 + 1} - \frac{1}{2} \int_0^X \frac{dx}{x + 1}$$

$$= \frac{1}{2} (\frac{1}{2} \ln(X^2 + 1) - \frac{1}{2} \ln 2 + arctg X - \frac{\pi}{4} - \ln(X + 1) + \ln 2$$

En prenant la limite lorsque $X \longrightarrow +\infty$ on a $A) = \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{\pi}{8}$

Exercice 1.5.5 *Soient* $f, g, h : [1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ *des fonctions localement intégrables sur* $[1, +\infty[$.
Montrer que $\int_1^{+\infty} \sqrt[3]{fgh}$ *converge.*

Solution 1.5.5
On sait que les fonctions f, g et h sont tous positives.
$0 \leq f \leq \max(f, g, h)$
$0 \leq g \leq \max(f, g, h)$
$0 \leq h \leq \max(f, g, h)$ En faisant le produit membre à membre et en prenant la racine cubique nous avons directement
$0 \leq \sqrt[3]{fgh} \leq \max(f, g, h) \leq f + g + h$. Comme les fonctions f, g et h sont localements intégrables l'intégrale $\int_1^{+\infty} \sqrt[3]{fgh}$ converge.

Exercice 1.5.6 *Fonction* Γ
1) Montrer que pour tout $\alpha \in]0, +\infty[$, *l'intégrale*
$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\exp(-t)$ *existe.*
2) Former une relation de récurrence entre $\Gamma(\alpha)$ *et* $\Gamma(\alpha+1)$ *pour* $\alpha \in]0, +\infty[$
3) En déduire $\Gamma(n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$

Solution 1.5.6
1)Les deux points de singularités sont 0 et $+\infty$ donc il suffit d'étudier la convergence des deux intégrales $\int_0^2 t^{\alpha-1}\exp(-t)$ et $\int_2^{+\infty} t^{\alpha-1}\exp(-t)$
Au voisinage de zéro on a
$t^{\alpha-1}\exp(-t) \sim_0 t^{\alpha-1}$ donc $\int_0^2 t^{\alpha-1}\exp(-t)$ converge si $1-\alpha < 1$ ie $\alpha > 0$.
Au voisinage de $+\infty$ on a $\lim_{t\to+\infty} t^2(t^{\alpha-1}e^{-t}) = 0$ comme $2 > 1$ alors $\int_2^{+\infty} t^{\alpha-1}\exp(-t)$ converge d'après une proposition du cours.
Donc $\Gamma(\alpha)$ existe pour tout $\alpha > 0$.
2)En posant $u = t^{\alpha-1}$, $du = (\alpha-1)t^{\alpha-2}$ et $dv = e^{-t}$, $v = -e^{-t}$ $\Gamma(\alpha)$ devient

$$\Gamma(\alpha) = [-t^{\alpha-1}e^{-t}]_0^{+\infty} + (\alpha-1)\int_0^{+\infty} t^{\alpha-2}\exp(-t)dt$$

$$= (\alpha-1)\int_0^{+\infty} t^{(\alpha-1)-1}\exp(-t)dt = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$$

donc

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$$

3)prenons $\alpha = n$ donc $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n)$ ainsi on obtient $\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\dots(n-(n-2))(n-(n-1))\Gamma(1) = (n-1)!$ car $\Gamma(1) = 1$.

Exercice 1.5.7 *1)Pour quelles valeurs des entiers n et p, l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^p(\ln x)^n}$ existe-t-elle.*
2) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x-\cos\theta)\sqrt{x^2-1}}, \quad \theta \neq k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, existe.

Solution 1.5.7
1) $1^{er}cas$ Si $p = 0$ l'intégrale devient $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{(\ln x)^n}$ qui est divergente car
$2^{em}cas$ Si $p = 1$. Soit $X > e$
-$n = 1$ alors on a $\int_e^X \frac{dx}{x\ln x} = [\ln(\ln x)]_e^X = \ln(\ln X)$ qui tend vers $+\infty$ lorsque X tend vers $+\infty$. Donc l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$ ne converge pas.
-Si $n \geq 2$ faisons le changement de variables $x = e^t$
$\int \frac{dx}{x(\ln x)^n} = \int \frac{dt}{t^n} = \frac{1}{1-n}.\frac{1}{t^{n-1}} + k = \frac{1}{1-n}\frac{1}{(\ln x)^{n-1}} + k$ Donc l'intégrale
$\int_e^X \frac{dx}{x(\ln x)^n} = [\frac{1}{1-n}\frac{1}{(\ln x)^{n-1}}]_e^X \longrightarrow \frac{1}{1-n}$, lorsque $X \to +\infty$ donc l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^n}$ converge.
$3^{em}cas$ $p \geq 2$
Si $n = 0$ alors $\frac{1}{(\ln x)^n} = 1$ donc l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ converge d'après l'intégrale de Riemann car $p \geq 2$.
Si non $\frac{1}{(\ln x)^n}$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Donc il existe $A \geq e$ tel que $\frac{1}{(\ln x)^n} \leq 1$ pour tout $x \geq A \geq e$. Donc quelque soit $x \geq A$ on a $\frac{1}{x^p(\ln x)^n} \leq \frac{1}{x^p}$.
Donc l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^p(\ln x)^n}$ converge d'après le critère de Riemann.
Donc en conclusion $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^p(\ln x)^n}$ existe si
$+p = 1,\ n \geq 2$
$p \geq 2,\ n \in \mathbb{N}$.
2)On a deux points de singularités 1 et $+\infty$ nous allons donc étudier séparément les deux intégrales

$$I_1 = \int_1^2 \frac{dx}{(x-\cos\theta)\sqrt{x^2-1}}$$

et

$$I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x-\cos\theta)\sqrt{x^2-1}}$$

Pour la première intégrale on a

$$(x-1)^{1/2}f(x) = \frac{1}{(x-\cos\theta)\sqrt{x+1}} \to \frac{1}{\sqrt{2}(x-\cos\theta)}$$

qui converge d'après une proposition du cours pour tout $\theta \neq k\pi$
Pour la deuxème intégrale on a

$$x^2 f(x) = x^2.\frac{1}{(x-\cos\theta)\sqrt{x^2-1}} = \frac{x^2}{x^2(1-\frac{\cos\theta}{x})\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}},\ x \geq 2$$

Donc $x^2 f(x) \longrightarrow 1$ si $x \to +\infty$ Donc l'intégrale généralisée I_2 existe. Par suite l'intégrale généralisée I converge.

Exercice 1.5.8 *Etudier la convergence des intégrales suivantes :*
1) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{|\sin \pi t|^{1/2}(1+t^2)}$
2) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}+\sin t}$ *et* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}+\sin t}$

Solution 1.5.8
1) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{|\sin \pi t|^{1/2}(1+t^2)} = \sum_{n\geq 0} \int_n^{n+1} \frac{dt}{|\sin \pi t|^{1/2}(1+t^2)}$
Posons $u_n = \int_n^{n+1} \frac{dt}{|\sin \pi t|^{1/2}(1+t^2)} = \int_0^{1} \frac{dt}{|\sin \pi t|^{1/2}(1+(n+t)^2)}$

$$f(t) = \frac{1}{|\sin \pi t|^{1/2}(1+(n+t)^2)} \sim_{t\longrightarrow 0} \frac{1}{(1+(n+t)^2)|\sin \pi t|^{1/2}}$$

donc intégrable en 0.
$f(t) \sim_{t\longrightarrow 1} \frac{1}{(1+(n+t)^2)\pi^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ donc intégrable en 1 par suite u_n existe $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.5.9 *Déterminer la nature de l'intégrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^a}{1+x^b} dx, \ (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

Solution 1.5.9 : 0 et $+\infty$ sont les deux points de singularités.
Au voisinage de 0^+

$$\frac{x^a}{1+x^b} \sim_{0^+} \begin{cases} x^a \text{ si } b > 0 \\ \frac{x^a}{2} \text{ si } b = 0 \\ x^{a-b} \text{ si } b < 0 \end{cases}$$

Au voisinage de $+\infty$

$$\frac{x^a}{1+x^b} \sim_{+\infty} \begin{cases} x^{a-b} \text{ si } b > 0 \\ \frac{x^a}{2} \text{ si } b = 0 \\ x^a \text{ si } b < 0 \end{cases}$$

Il ya convergence si et seulement si $(a+1)(a-b+1) < 0$.

Exercice 1.5.10 *On cherche à étudier par plusieurs manières différentes la nature de l'intégrale* $I = \int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{t^2+1} dt$
a) Etudier la monotonie de la fonction $f(t) = \frac{t}{t^2+1}$ *sur* $[1, +\infty[$.
En déduire la nature de I. *Enoncer clairement le résultat utilisé.*
b) Retrouver le résultat précédent en faisant une intégration par parties sur $\int_0^{X} \frac{t \sin t}{t^2+1} dt$
c) Réduire au même dénominateur l'expression $\frac{t \sin t}{t^2+1} - \frac{\sin t}{t}$ *et en déduire une troisième manière de retrouver le même résultat.*

Solution 1.5.10
La fonction $h(t) = \frac{t \sin t}{t^2+1}$ est localement intégrable sur $[0, +\infty[$.
La dérivée de la fonction f s'écrit $f'(x) = \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2} \leq 0$ sur $[1, +\infty[$. Donc f est décroissante. De pllus f est positive et tend vers zéro lorsque t tend vers $+\infty$.
Pour tout $u, v \in [1, +\infty[$ $\int_u^v \sin t dt \leq 2$. D'après le critère d'Abel pour les intégrales généralisées l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{t^2+1} dt$ converge.
b) Posons $u(t) = \frac{t}{t^2+1}$, $v'(t) = \sin t$ donc $u'(t) = \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}$, $\quad v(t) = -\cos t$

$$\int_0^X \frac{t \sin t}{t^2+1} dt = \frac{-X \cos X}{X^2+1} + \int_0^X \frac{(1-t^2)\cos t}{(1+t^2)^2} dt$$

Cette intégrale converge car $\left|\frac{(1-t^2)\cos t}{(1+t^2)^2}\right| \leq \frac{1}{(1+t^2)^2}$
c)$\frac{t \sin t}{t^2+1} - \frac{\sin t}{t} = -\frac{\sin t}{t(t^2+1)} \Longrightarrow \frac{t \sin t}{t^2+1} = \frac{\sin t}{t} - \frac{\sin t}{t(t^2+1)}$
$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ converge d'après le critère d'Abel.
$|-\frac{\sin t}{t(t^2+1)}| \leq \frac{1}{t^3}$ et comme $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3}$ converge donc $\int_1^{+\infty} -\frac{\sin t}{t(t^2+1)}$ con verge d'oú la convergence de I.

Exercice 1.5.11 *1) Etudier la convergence de l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\beta} dt$ *et énoncer le critère de Riemann pour les intégrales généralisées*
2) Pour $x \in]0, 1]$, *soit* $f_\alpha(x) = \frac{\ln x}{\ln^\alpha(1+x)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. *Etudier suivant les valeurs de* α *la convergence de l'intégrale*

$$\int_0^1 f_\alpha(x) dx$$

3) Si $\alpha > 0$ *étudier la nature de* $\int_0^\infty e^{-x^\alpha} dx$

Solution 1.5.11
0 est le seul point de singularités. Pour tout $x \in]0, 1]$ $f_\alpha(x) \leq 0$. f garde donc un signe constant on peut utiliser le critère d'équivalence. $f_[\alpha(x) \sim_0 x^{-\alpha} \ln x$ donc les intégrales $\int_0^1 x^{-\alpha} \ln x$ et $\int_0^1 f_\alpha(x) dx$ sont de même natures.
Pour $\alpha < 0$ f_α se prolonge par continuité en 0. donc $\int_0^1 f_\alpha(x) dx$ converge.
Si $0 \leq \alpha < 1$ et soit $\beta \in]\alpha, 1[$ donc $x^\beta g_\alpha(x) = x^{\beta-\alpha} \ln x \overset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$ donc il existe $A > 0$ tel que $x^{-\alpha} \ln x \leq \frac{A}{x^\beta}$ pour tout $x \in]0, 1]$ Comme $\int_0^1 \frac{dx}{x^\beta} dx$ converge donc $\int_0^1 x^{-\alpha} \ln x dx$ converge ce qui entraine $\int_0^1 f_\alpha(x) dx$ converge.
Si $\alpha = 1$ par une intégration on montre que $\int_X^1 \frac{\ln x}{x} dx$ tend vers l'infini lorsque X tend vers zéro. D'où la divergence de $\int_0^1 f_\alpha(x) dx$
Si $\alpha > 1$ $|f_\alpha| = \frac{|\ln x|}{\ln^\alpha(1+x)} \geq \frac{|\ln x|}{\ln(1+x)}$ et donc $\int_0^1 f_\alpha$ diverge.
3)Pour tout réel $\lambda > 0$, $x^\lambda e^{-x^\alpha} \longrightarrow 0$ lorsque x tend vers l'infini. Il existe $A > 0$ et un $\lambda > 1$ tels que $\forall x \geq 1$, $e^{-x^\alpha} \leq \frac{A}{x^\lambda}$. Comme $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ converge donc par le théorème de comparaison $\int_1^{+\infty} e^{-x^\alpha} \Longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x^\alpha}$

Exercice 1.5.12 *1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t \ln^\alpha t}$, $a > 1$ converge à l'infini si et seulement si $\alpha > 1$.*
2) Montrer que $I = \int_0^1 \ln t dt$ est convergente à l'origine.
3) Soient α, $\beta \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\ln^\alpha t}{t^\beta} dt$ est convergente si $\beta > 1$ ou si $\beta = 1$ et $\alpha < -1$ et divergente si $\beta < 1$ ou si $\beta = 1$ et $\alpha \geq -1$ 4) Montrer de la même manière qu'au (3) que l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} t^\beta |\ln t|^\alpha dt$ est convergente si $\beta > -1$, diverge si $\beta < -1$.

Solution 1.5.12
1)) En posant $x = \ln t$ l'intégrale devient $\int_{la}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ qui converge d'après le critère de Riemann si $\alpha > 1$. D'où le résultat.
2)

$$\lim_{x \to 0} \int_x^1 \ln t dt = \lim_{x \to 0} \left[t \ln t - t \right]_x^1 = -1.$$

3) a) Supposons $\beta > 1$ et soit γ un réel vérifiant $\beta > \gamma > 1$. On a

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t^\gamma \ln^\alpha t}{t^\beta} = \lim_{t \to +\infty} t^{\gamma - \beta} \ln^\alpha t = 0$$

b) Si $\beta > 1$, choisisons $\gamma \in \mathbb{R} :\ \beta < \gamma < 1$. On a alors

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t^\gamma \ln^\alpha t}{t^\beta} = \lim_{t \to +\infty} t^{\beta - \gamma} \ln^\alpha t = 0$$

et la divergence de l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\gamma}$ entraine celle de l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\ln^\alpha t}{t^\beta} dt$.
c) Si $\beta = 1$, on fait le changement de variable $x = \ln t$ l'intégrale devient $\int_{\ln 2}^{+\infty} x^\alpha dx$ qui converge si $-\alpha > 1$ ie $\alpha < -1$ et diverge si $\alpha \geq -1$.

Exercice 1.5.13 *Etudier la convergence des intégrales suivantes*

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}}, \;\; I_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\ln x}$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{dx}{\arccos x} dx \;\; I_4 = \int_0^{\pi/2} \cos x \ln(\tan x) dx$$

2)Soient $\alpha \geq \beta \geq 0$ deux réels positifs. Etudier la convergence de l'intégrale

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta}$$

3) Etudier la convergence de l'intégrale

$$I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx$$

4) A) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction positive et décroissante. Montrer que* $\int_0^{+\infty} f(x)|\sin x|dx$ *converge si et seulement si* $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ *converge.*
B)Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$*, positive et décroissante sur* $\mathbb{R}_+$ *et tendant vers zéro en* $+\infty$*. Montrer que* $\int_0^{+\infty} f(x)\sin x dx$ *converge*
4) Etudier la convergence des deux intégrales

$$J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx \; J_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}})dx$$

Exercice 1.5.14 *Soit* $f : [1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ *décroissante positive telle que* $\int_1^{+\infty} f$ *converge.*
a) Montrer $xf(x) \to 0$ *lorsque* $x \to +\infty$
b) Montrer que $\int_1^{+\infty} x(f(x) - f(x+1))dx$ *converge et calculer sa valeur.*

Exercice 1.5.15 *Etudier la convergence et calculer les intégrales suivantes*

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{1+t^2}, \; 2) \int \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$$

Exercice 1.5.16 *Etudier la nature de l'intégrale généralisée*

$$1) \int_0^{+\infty} (x + 2 - \sqrt{x^2 + 4x + 1})dx, \;\; 2) \int_0^{+\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt{x^2 + 1})dx$$

$$3)(*) \int_0^{+\infty} ((x+1)^{\frac{1}{x+1}} - x^{\frac{1}{x}})dx, \;\; 4) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$$

$$5)(*) \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx \;\; 6)(*) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^\alpha(1 + x^\beta)}$$

Exercice 1.5.17 *Déterminer la nature de l'intégrale impropres* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^3}$

Exercice 1.5.18 *Etudier la convergence des deux intégrales* $I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx$ *et* $J = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x dx$*. Calculer I et J.*

Exercice 1.5.19 *1) Déterminer un équivalent de chacune des fonctions suivantes au point considéré*

$$f(x) = \frac{(3x^2 + 4x^4)(2x + 5)}{3x^2 + 7x^7} \quad \text{en } 0 \text{ puis en } +\infty$$

$$g(x) = \frac{x^2 - x - 1}{\sqrt{x - 2}} \quad \text{en } 2$$

Puis en déduire la nature de $\int_0^\infty f(t)dt$ *et* $\int_0^3 g(t)dt$
2) Etudier la convergence des intégrales suivantes(comparaison)

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{2t + \sqrt[3]{t^2 + 1} + 5}, \quad J = \int_0^\infty \frac{\sin t}{1 + t^2} dt$$

$$K = \int_1^2 \frac{t^2 - 3t + 2}{(2-t)^\alpha (1-t)^{3/2}}$$

3) a) Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale $\int_x^1 t^\alpha \ln t dt$
b) En déduire la nature de $I = \int_0^1 t^\alpha \ln t$ *pour* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et sa valeur dans le cas de convergence.*
c) Effectuer le changement de variables $u = \frac{1}{t}$ *pour transformer* $\int_1^x \frac{\ln t}{t^\alpha} dt$
d) En déduire la nature de $J = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} dt$ *pour* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et sa valeur dans le cas de coonvergence.*
e) Déterminer la nature de $K = \int_2^{+\infty} \frac{1}{(t^2-1)^2} dt$
Trouver $\alpha,\ \beta,\ \gamma\ \delta$ *tels que*

$$\frac{1}{(t^2-1)^2} = \frac{\alpha}{(t^2-1)^2} + \frac{\beta}{t-1} + \frac{\gamma}{(t+1)^2} + \frac{\gamma}{t+1}$$

Calculer K.
4) Etudier les intégrales suivantes

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha} dt,\ I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$$