Champs de vecteurs-Algèbre de Lie-Groupe de difféomorphisme à un paramètre

Abdoul Salam DIALLO [1]
Université Alioune DIOP de Bambey
UFR SATIC, Département de Mathématiques
B.P. 30, Bambey, Sénégal

1 Champs de vecteurs sur une variété

Soient M une variété de dimension n et TM son fibré tangent.

1.1 Définitions

Definition 1.1. *Un champ de vecteur X sur M est une application*

$$\begin{array}{rcl} X : M & \to & TM \\ p & \mapsto & X(p) = (p, X_p) \end{array} \tag{1}$$

qui assigne à chaque point $p \in M$ un couple composé d'un point et d'un vecteur tangent au point p.

Remark 1.1. *Un champ de vecteur X sur M est une section du fibré tangent TM, c'est-à-dire, c'est une application*

$$X : M \to TM$$

telle que

$$\pi \circ X : M \to M$$
$$p \mapsto \pi(X(p)) = p$$

où π est la projection sur TM.

Definition 1.2. *Un champ de vecteur est différentiable si l'application qui la définie est de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

L'ensemble des champs de vecteurs différentiables sur une variété différentiable est noté $\mathfrak{X}(M)$

1.2 Propriétés des champs de vecteurs

Un champ de vecteur différentiable assigne à chaque point $p \in M$ un vecteur tangent de T_pM

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

[1]E-mail: abdoulsalam.diallo@uadb.edu.sn

où les coefficients $X^i(p)$ sont les composantes locales du champ de vecteur. Puisque le champ de vecteur est différentiable, ces composantes sont des fonctions différentialbes de n coordonnées x^i de p.

Proposition 1.1. *Un champ de vecteurs X sur une variété différentiable M est une dérivation de $\mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R})$, c'est-à-dire une application linéaire*

$$\begin{array}{rcl} X : \mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R}) \\ g & \mapsto & X(g) \end{array} \tag{2}$$

telle que

$$X(g) = X^i \frac{\partial g}{\partial x^i}.$$

Proof. La linéarité vient:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall g, h \in \mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R}), X(ag + bh) = aX(g) + bX(h)$$

est la règle de la dérivation est:

$$\forall g, h \in \mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R}), X(gh) = gX(h) + hX(g).$$

□

Proposition 1.2. *L'ensemble des champs de vecteurs $\mathfrak{X}(M)$ sur une variété différentiable M est un module sur $\mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R})$ définis par les opérations suivantes:*

1. *addition:* $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M) : (X, Y) \mapsto X + Y$ *telle que*

$$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \forall g \in \mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R}), (X + Y)(g) = X(g) + Y(g);$$

2. *multiplication par une fonction différentiable:* $\mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R}) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M) : (f, X) \mapsto fX$ *telle que*

$$\forall X \in \mathfrak{X}(M), \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R}), (fX)(g) = fX(g) = fXg.$$

Proposition 1.3. *L'ensemble des champs de vecteurs $\mathfrak{X}(M)$ sur une variété différentiable M est une algèbre de Lie.*

Pour comprendre cette structure algébrique, nous allons à la section suivante.

2 Algèbre de Lie des champs de vecteurs

2.1 Crochet

Soient $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

2.1.1 Produit de champs de vecteurs

Definition 2.1. *Le produit de champs de vecteurs est un opérateur défini par*

$$\forall g \in \mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R}) : (XY)(g) = X(Y(g)).$$

Proposition 2.1. *Le produit de champ de vecteur n'est pas un champ de vecteur différentiable.*

Proof. La dérivation n'est pas satisfaite: $\forall g, h \in \mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R})$, on a:

$$\begin{aligned} (XY)(gh) &= X(Y(gh)) \\ &= X(gY(h) + hY(g)) \\ &= gX(Y(h)) + X(g)Y(h) + hX(Y(g)) + X(h)Y(g) \\ &\neq g(XY)(h) + h(XY)(g) = gX(Y(h)) + hX(Y(g)). \end{aligned}$$

□

Proposition 2.2. *L'opérateur XY est un opérateur différentiel du second ordre.*

Proof. En introduisant les coordonnées locales et en posant $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, on a:

$$\begin{aligned} (XY)(g) &= X(Y(g)) = X(Y^i \partial_i g) \\ &= X^j \partial_j((Y^i \partial_i g)) \\ &= X^j \partial_j Y^i \partial_i g + X^j Y^i \partial^2_{ji} g. \end{aligned}$$

□

2.1.2 Crochet de champs de vecteurs

On peut néanmoins construire un opérateur de dérivation à partir du produit de champs de vecteurs.

Definition 2.2. *Le crochet est l'application:*

$$\begin{aligned} [,] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\mapsto [X, Y] = XY - YX. \end{aligned} \tag{3}$$

Le crochet des champs de vecteurs X et Y opère sur $\mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R})$, c'est-à-dire:

$$\begin{aligned} [X, Y] : \mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R}) \\ g &\mapsto [X, Y](g) = X(Y(g)) - Y(X(g)). \end{aligned}$$

Proposition 2.3. *Le crochet de champs de vecteurs différentiables est un champ de vecteurs différentiables.*

Proof. La propriété de la linéarité:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall g, h \in \mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R}), [X, Y](ag + bh) = a[X, Y](g) + b[X, Y](h)$$

se prouve facilement. Vérifions la règle de la dérivation:

$$\forall g, h \in \mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R}), [X, Y](gh) = g[X, Y](h) + h[X, Y](g).$$

On a succéssivement:

$$\begin{array}{rcl} [X,Y](gh) &=& (XY-YX)(gh) = XY(gh)-YX(gh) \\ &=& X(Y(gh))-Y(X(gh)) \\ &=& X(gY(h)+hY(g))-Y(gX(h)+hX(g)) \\ &=& gX(Y(h))+Y(h)X(g)+hX(Y(g))+Y(g)X(h) \\ &-& gY(X(h))-X(h)Y(g)-hY(X(g))-X(g)Y(h) \\ &=& g[X,Y](h)+h[X,Y](g). \end{array}$$

□

À partir des expression, $(XY)(g)$ et $(YX)(g)$ en coordonnées locales, on a: $\forall g \in \mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R})$:

$$[X,Y](g) = (X^j\partial_j Y^i - Y^j\partial_j X^i)\partial_i g.$$

Ceci permet également de vérifier que le crochet de champs de vecteurs est un opérateur de dérivation sur $\mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R})$.

En coordonnées locales, l'expression du crochet $[X,Y]$ est:

$$[X,Y] = (X^j\partial_j Y^i - Y^j\partial_j X^i)\partial_i.$$

En particulier

$$[\partial_i,\partial_j] = 0$$

Dans un tel cas, on dit coordonnée de la base induite.

2.1.3 Théorème

Soient M et N deux variétés de même dimension. Soient f un difféomorphisme entre M et N et $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Si $h \in \mathcal{C}^\infty(N;\mathbb{R})$, alors

$$X(f^*h) \in \mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R}).$$

Definition 2.3. *L'image d'un champ de vecteurs X sur M par f est le champ de vecteurs Z sur N défini par:*

$$\begin{array}{rcl} Z : \mathcal{C}^\infty(N;\mathbb{R}) &\to& \mathcal{C}^\infty(N;\mathbb{R}) \\ h &\mapsto& Z(h) = X(f^*h)\circ f^{-1}. \end{array} \tag{4}$$

On note $Z(h) = (dfX)(h)$.

Proposition 2.4. *Soient X et Y deux champs de vecteurs sur M. On a:*

$$df[X,Y] = [dfX, dfY]$$

Proof. Par définition, pour le champ de vecteur $[X,Y]$ $\forall h \in \mathcal{C}^\infty(N;\mathbb{R})$, on a:

$$\begin{array}{rcl} (df[X,Y])(h) &=& [X,Y](f^*h)\circ f^{-1} \\ &=& X(Y(f^*h))\circ f^{-1} - Y(X(f^*h))\circ f^{-1} \\ &=& X(Y(h\circ f)\circ f^{-1}\circ f)\circ f^{-1} - Y(X(h\circ f)\circ f^{-1}\circ f)\circ f^{-1} \\ &=& X\big((Y(h\circ f)\circ f^{-1})\circ f\big)\circ f^{-1} - Y\big((X(h\circ f)\circ f^{-1})\circ f\big)\circ f^{-1} \end{array}$$

Par définition:

$$Y(h \circ f) \circ f^{-1} = (dfY)(h) \quad X(h \circ f) \circ f^{-1} = (dfX)(h).$$

Ainsi en omettant les parenthèse, on obtient:

$$\begin{aligned}
(df[X,Y])(h) &= X(dfY(h) \circ f) \circ f^{-1} - Y(dfX(h) \circ f) \circ f^{-1} \\
&= X\big(f^* dfY(h)\big) \circ f^{-1} - Y\big(f^* dfX(h)\big) \circ f^{-1} \\
&= dfX(dfY(h)) - dfY(dfX(h)) \\
&= [dfX, dfY](h).
\end{aligned}$$

□

2.2 Algèbre de Lie

Étant donné un corps commutatif $\mathbb{K}$, une algèbre sur $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$-algèbre est un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ munit d'une application bilinéaire: $(,) : E \times E \to E$.

Proposition 2.5. *Le module $\mathfrak{X}(M)$ muni de la loi de composition interne appelé loi du crochet est une $\mathbb{R}$-algèbre.*

Proof. Le module $\mathfrak{X}(M)$ est évidemment un espace vectoriel. De plus, le crochet est une loi bilinéaire:

- $[X_1 + X_2, X_3] = [X_1, X_3] + [X_2, X_3], \forall X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{X}(M)$;
- $[X_1, X_2 + X_3] = [X_1, X_2] + [X_1, X_3], \forall X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{X}(M)$;
- $[k_1 X_1, k_2 X_2] = k_1 k_2 [X_1, X_2], \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$.

□

Proposition 2.6. *La $\mathbb{R}$-algèbre $\mathfrak{X}(M)$ est une algère telle que la loi crochet est anticommutative et vérifie l'idendité de Jacobi.*

Proof. Le crochet est anticommutative:

$$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), [X,Y] = -[Y,X]$$

car

$$\forall g \in \mathcal{C}^\infty(M;\mathbb{R}), [X,Y](g) = (XY - YX)(g) = X(Y(g)) - Y(X(g)) = -[Y,X](g).$$

On montre aussi l'identité de Jacobi: $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, on a:

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0.$$

□

Notons que $[X,X] = 0$.

Definition 2.4. *Une algèbre de Lie est une algèbre dont la loi interne est anticommutative et satisfait l'identité de Jacobi.*

Proposition 2.7. *La $\mathbb{R}$-algèbre $\mathfrak{X}(M)$ est une algèbre de Lie.*

Proposition 2.8. *Le crochet n'est pas associative.*

Example 2.1. *Soit $\mathcal{L}$ un espace vectoriel réel, muni du crochet de Lie nul: $[X, Y] = 0$ pour tout $X, Y \in \mathcal{L}$. Une telle algèbre de Lie est dite abélienne. Cette terminologie vient du fait que l'on peut interpréter le crochet de Lie comme une sorte de commutateur (notons cependant que $\mathcal{L}$ n'est pas muni d'un produit).*

Example 2.2. *Soit $\mathcal{L}$ l'espace vectoriel réel engrendré par X et Y, muni de l'unique application bilinéaire satisfaisant $[X, Y] = -[Y, X]$ et $[X, Y] = Y$. L'identité de Jacobi est automatiquement satisfaite en dimension strictement inférieure à trois. Il s'agit en fait de l'unique algèbre de Lie réelle non abélienne de dimension deux.*

Example 2.3. *Soit $\mathcal{L}$ l'espace vectoriel réel engendré par X, Y et Z, muni de l'unique application bilinéaire satisfaisant $[X, Y] = -[Y, X]$ et*

$$[X, Y] = Z \; [Y, Z] = X \; [Z, X] = Y.$$

L'identité de Jacobi se vérife aisément. Cette algèbre de Lie, habituellement notée $so(3)$ est isomorphe à l'espace vectoriel réel des matrices antisymétriques dans $\mathcal{M}_{(3,3)}(\mathbb{R})$, muni du commutateur pour le produit matriciel. Ceci se vérifie aisément au moyen de l'application $\Psi : \mathcal{L} \to \mathcal{M}_{(3,3)}(\mathbb{R})$ définie par:

$$\Psi(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi(Z) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par exemple

$$\begin{aligned} [\Psi(X), \Psi(Y)] &= \Psi(X)\Psi(Y) - \Psi(Y)\Psi(X) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Psi(Z). \end{aligned}$$

2.3 Dérivée de Lie

Definition 2.5. *La dérivée de Lie du champ d vecteur X par rapport au champ de vecteur Y est le champ de vecteur défini par*

$$L_Y X = [Y, X]. \tag{5}$$

Dans un système de coordonnées locale, considérons les deux champs de vecteurs suivants:

$$Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{et} \quad X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

La dérivée de Lie du champ de vecteur X par rapport au champ de vecteur Y est le champ de vecteur

$$L_Y X = [Y, X] = (Y^j \partial_j X^i - X^j \partial_j Y^i)\partial_i \tag{6}$$

Proposition 2.9. *Si $f : M \to N$ est un difféomorphisme, alors $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$*

1. *L'application $L_X : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ est naturel par rapport à l'application $df : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(N)$, c'est-à-dire:*
$$df \circ L_X = L_{df X} \circ df.$$
2. *L_X est naturel par rapport aux restrictions, c'est-à-dire, pour tout ouvert $U \subset M$, tel que $|_U : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(U)$, on a:*
$$|_U \circ L_X = L_{X|_U} \circ |_U.$$

Proof. La première assertion est évidente, puisque: $\forall Y \in \mathfrak{X}(M)$, on a:
$$L_{df X} df Y = [df X, df Y] = df[X, Y] = df L_X Y.$$
La seconde assertion, c'est-à-dire: $\forall Y \in \mathfrak{X}(M)$
$$L_{X|_U} Y|_U = (L_X Y)|_U$$
est aussi claire à partir de l'égalité $d(f|_U) = df|_U$ à partir de la définition de d. □

3 Groupes à un paramètre de difféomorphismes et flot

Pour étudier un mouvement sur une variété, nous avons besoin de quelques définitions comme: On appelle une équation différentielle sur une variété M une équation de la forme
$$\gamma'(t) = X(\gamma(t))$$
où X est un champ de vecteurs sur M et γ est une courbe sur M. Tout champ de vecteurs sur M définit donc une équation différentielle, dont l'inconnue est la courbe $\gamma : \mathbb{R} \to M$.

En chacun de ces points, cette courbe doit avoir pour vecteur tangent le vecteur associé à X en ce point. En physique, ce type d'équation différentielle est très commun. Comme dans les espaces vectoriels normés, on peut parler dans ce cas de l'existence et de l'unicité de solutions. L'unique solution avec des conditions initiales de cette équation est appelée le flot de X.

3.1 Équations différentielles dans un espace de Banach

Soient E un espace de Banach, Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, J un intervalle de $\mathbb{R}$ et
$$\begin{array}{rcl} f : \Omega & \to & E \\ (t, x) & \mapsto & f(t, x) \end{array}$$
une application. On considère l'équation différentielle
$$\frac{dx}{dt} = f(t, x).$$
Une fonction différentiable $\varphi : J \subset \mathbb{R} \to E$ est dite solution de cette équation si:
$$\forall t \in J : (t, \varphi(t)) \in \Omega \quad \text{et} \quad \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)).$$

3.1.1 Courbes intégrales

Definition 3.1. *Une courbe*

$$\begin{array}{rcl} \bar{x}: J & \to & E \\ t & \mapsto & \bar{x}(t) \end{array}$$

est une courbe intégrale de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

si

$$\forall t \in J : (t, \bar{x}(t)) \in \Omega \quad et \quad \frac{d\bar{x}}{dt} = f(t, \bar{x}).$$

L'existence d'une courbe intégrale signifie qu'un vecteur tangent $f(t,x)$ est affecté à chaque point x de la courbe.

Remark 3.1. *Si l'espace vectoriel E est $\mathbb{R}^n$, alors le vecteur équation différentielle est équivalent à un système de n équations différentielles:*

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(t, x^1, \ldots, x^n).$$

3.1.2 Existence et unicité des solutions

Pour étudier la question de l'existence des courbes intégrales, nous aurons besoin d'utiliser le théorème d'existence et d'unicité des solutions pour les problèmes de Cauchy.

Nous commençons par rappeler la définition appropriée pour la régularité des équations différentielles.

Definition 3.2. *Une application*

$$\begin{array}{rcl} f: \Omega & \to & E \\ (t,x) & \mapsto & f(t,x) \end{array}$$

est localement lipschitzienne en x si pour tout voisinage V de Ω, on a:

$$\forall (t,x_1),(t,x_2) \in V, \exists k \in \mathbb{R}_+, \|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leq k\|x_1 - x_2\|.$$

Proposition 3.1. *Étant donné une application continue et localement lipschitzienne en x*

$$\begin{array}{rcl} f: \Omega & \to & E \\ (t,x) & \mapsto & f(t,x) \end{array}$$

alors pour tout point (t_0, x_0) de Ω il existe un voisinage de x_0 dans E et un intervalle $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ de $\mathbb{R}$ tel que l'équation

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

à une seule solution différentiable $\bar{x} : t \mapsto \bar{x}(t)$ définie sur $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ et tel que $\bar{x}(t_0) = x_0$.

Definition 3.3. *Une application* $f : U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : (t, x) \mapsto f(t, x) = f_t(x)$ *est lipschitzienne de constante* $k > 0$ *ou* k*-lipschitzienne en* x *si*

$$\forall (t, x_1), (t, x_2) \in V, \exists k \in \mathbb{R}_+, \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq k\|x_1 - x_2\|.$$

Proposition 3.2. *(Cauchy) Soit* $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : (t, x) \mapsto f(t, x) = f_t(x)$ *une application continue et* k*-lipschitzienne en* x*. On considère le problème de Cauchy suivant:*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

avec $(t_0, x_0) \in U$*. Alors*

1. *(existence) pour tout* $(t_0, x_0) \in U$ *il existe* $\varepsilon > 0$ *et une application* $x :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^n$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *satisfaisant le problème de Cauchy;*
2. *(unicité) si* $x_i :]a_i, b_i[\to \mathbb{R}^n, i = 1, 2$ *satisfont le problème de Cauchy et* $x_1(t) = x_2(t)$ *pour un certain* $t \in]a_1, b_1[\bigcap]a_2, b_2[$*, alors* $x_1(t) = x_2(t)$ *pour tout* $t \in]a_1, b_1[\bigcap]a_2, b_2[$*;*
3. *(régularité) si* $f \in \mathcal{C}^r$ *avec* $1 \leq r \leq \infty$ *alors toute solution* $x : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *du problème de Cauchy est de classe* $\mathcal{C}^{r+1}$*;*
4. *(variation des conditions initiales) pour* $(0, u) \in U$*, on note* $x(t, u)$ *une solution du problème de Cauchy satisfaisant* $x(0) = u$*; si* $x(t, u)$ *est définie pour* $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ *alors il existe un voisinage* V *de* $u \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $x(t, u)$ *est définie pour* $t \in]-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}[$*, pour tout* $v \in V$*;*
5. *(régularité en les conditions initiales) si* $f \in \mathcal{C}^r$*, pour* $1 \leq r \leq \infty$*, alors* $x(t, u)$ *est de classe* $\mathcal{C}^r$ *en* $u \in \mathbb{R}^n$*.*

Proposition 3.3. *Soit* $X \in \mathfrak{X}(M)$*. Pour tout* $p \in M$*, il existe*

1. *un intervalle* $I_p \subset \mathbb{R}$ *contenant* 0*,*
2. *une courbe intégrale* $\gamma : I_p \to M$ *de* X *telle que* $\gamma_p(0) = p$*,*

et qui sont maximaux pour ces propriété: si I' *et* γ' *ont les mêmes propriétés, alors* $I' \subset I_p$ *et* $\gamma'(t) = \gamma_p(t)$ *pour tout* $t \in I'$

Definition 3.4. *Soit* $X \in \mathfrak{X}(M)$*. On dit que* X *est complet si toutes ses courbes intégrales dans* M *sont définies sur toute la droite réelle.*

3.1.3 Équation différentielle et champ de vecteur

Rappelons qu'à chaque instant t correspond un point d'une variété M

$$J \to M : t \mapsto x(t)$$

et qu'un champ de vecteur sur M est une application de M sur TM qui assigne à chaque point x de M un vecteur tangent de T_xM .

À chaque champ de vecteur sur M est associé une équation différentielle du premier ordre

$$\frac{dx}{dt} = X_{x(t)} = X(x(t)) \quad \text{avec} \quad x(0) = x_0$$

et inversement.

3.2 Groupes à un paramètre de difféomorphismes et flot

Soient M une variété différentiable, J un intervalle de $\mathbb{R}$ et X un champ de vecteur sur M.

Question: Étant donné un champ de vecteur, existe-t-il une courbe pour laquelle chaque vecteur tangent est un vecteur de ce champ ?

3.2.1 Transformation locale de M

Definition 3.5. *Une courbe intégrale de X sur M est une courbe*

$$\begin{array}{rcl} c : J & \rightarrow & M \\ t & \mapsto & c(t) \end{array}$$

telle que

$$\frac{dc}{dt}(t) = X(c(t))$$

Definition 3.6. *Soit $X \in \mathfrak{X}(M)$. Une courbe intégrale γ pour X sur M est une application différentiable $\gamma : J \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ telle que $\gamma_{*t}(\frac{\partial}{\partial t}) = X_{\gamma(t)}$ pour tout $t \in J$.*

Regardons plus explicitement la condition satisfaite par une courbe intégrale γ pour $X \in \mathfrak{X}(M)$. Soit (U, φ) une carte de M en p, de coordonnées $x^1, \ldots, x^n$. Alors

$$X_q = \sum_{i=1}^{n} X^i(q) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

et

$$\varphi \circ \gamma(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t)).$$

Par conséquent

$$\gamma_{*t}(\frac{\partial}{\partial t}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{dx^i(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

et γ est une courbe intégrale pour X dans U si et seulement si

$$\frac{dx^i(t)}{dt} = X^i \circ \varphi^{-1}(x^1(t), \ldots, x^n(t)),\ i = 1, \ldots, n$$

pour tout $t \in J$ tel que $\gamma(t) \in U$. L'équation précédente est un système de n équations différentielles du premier ordre.

Reexaminons le théorème de l'existence locale et du caractère unique des solutions d'équations différentielles.

Proposition 3.4. *Considérons $X \in \mathfrak{X}(M)$ et un point de M. Il existe:*

- *un voisinage $U \subset M$ du point;*
- *un intervalle $I_\varepsilon = \{t \in \mathbb{R}, |t| < \varepsilon, \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$;*

- *une application différentiable*

$$\begin{array}{rcl}\phi : I_\varepsilon \times U & \to & M \\ (t,x) & \mapsto & \phi(t,x) = \phi_t(x)\end{array}$$

telle que: $I_\varepsilon \to M : t \mapsto \phi_t(x)$ *est une courbe intégrable de* X *avec* $\phi_0(x) = x$.

Definition 3.7. *Une transformation locale de* M *générée par le champ de vecteurs* X *est un difféomorphisme entre les voisinages de* M

$$\begin{array}{rcl}\phi_t : U \subset M & \to & M \\ x & \mapsto & \phi_t(x)\end{array}$$

vérifiant l'équation différentielle suivante:

$$\frac{d}{dt}\phi_t(x) = X(\phi_t(x))$$

et

$$\phi_0(x) = x.$$

Pour chaque $t \in I$, le difféomorphisme ϕ_t, fait correspondre U à un autre ouvert, $\phi_t(U)$ suivant les courbes intégrales (respectivement pour chaque point). La famille de ces difféomorphisme ϕ_t est appelée le flot du champ de vecteurs X sur M.

Definition 3.8. *Un flot de* X *en* $x \in M$ *est un triplet* (U, ε, ϕ).

Notons que en chaque point $x \in U$, l'application ϕ donne localement une courbe intégrale unique.

Theorem 3.1. *(Unicité) Si* (U, ε, ϕ) *et* $(U', \varepsilon', \phi')$ *sont des flots en* $x \in M$, *alors* $\phi = \phi'$ *sur* $(I \cap I') \times (U \cap U')$.

Proof. □

Theorem 3.2. *(Existence) Si* X *est un champ de vecteur sur une variété* M, *il existe un flot de* X *à chaque* $x \in M$.

Proof. □

3.2.2 Groupe de difféomorphismes (local) à un paramètre

Proposition 3.5. *Tout champ de vecteur sur* M *génère un groupe de difféomorphismes (local) sur* M *à un paramètre.*

Proof. Soient U un ouvert de M, $I = \{t : |t| < \varepsilon, \varepsilon > 0\}$ et Ω un voisinage de $\{0\} \times M$. Considérons une transformation locale

$$\begin{array}{rcl}U \subset M & \to & M \\ x & \mapsto & \phi_{t+s}(x)\end{array}$$

avec $t, s, t+s \in I$. Cette transformation satisfait, comme $\phi_t(x)$ l'équation différentielle associée au champ de vecteur X.
Les courbes intégrales suivantes associées à X:

$$t \mapsto \phi_{t+s} \quad \text{et} \quad t \mapsto \phi_t(\phi_s(x))$$

ont la même valeurs $\phi_s(x)$ pour $t = 0$ car $\Big(\phi_0(\phi_s(x)) = \phi_s(x)\Big)$ sont telles que: $\forall t, s, t+s \in I$:

$$\phi_{t+s}(x) = (\phi_t \circ \phi_s)(x).$$

Par conséquent, la transformation locale sur M sont elles que: $\forall t, s, t+s \in I$:

$$\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s.$$

En particulier, on déduit:

$$\phi_{-s} = \phi_s^{-1}.$$

En conclusion, les transformations locales sur M ont une structure de groupe avec la loi composition et d'élément neutre ϕ_0. $\square$

Definition 3.9. *La paire (Ω, ϕ) définit un groupe de difféomorphismes (local) à un paramètre sur M.*

Remark 3.2. *Il faut souligner que les difféomorphismes précédents sont locaux et non globaux sur M. Les transformations locales ϕ_t sont définies dans n'importe quel voisinage de chaque point x_0 dans M pour des instants de l'intervalle défini par $|t| \leq \varepsilon(x_0)$.*

3.2.3 Groupe de difféomorphismes (global) à un paramètre

Nous allons considérer globalement le flot du champ de vecteur, étendu autant que possible dans le paramètre t. Considérons

$$\overline{\Omega} = \mathbb{R} \times M$$

et

$$\Phi : \mathbb{R} \times M \to M : (t, x) \mapsto x$$

où les difféomorphismes de M ($\forall t \in \mathbb{R}$)

$$\phi_t : M \to M : x \mapsto \phi_t(x)$$

sont telles que:

1. ϕ_0 est l'identité
2. $\phi_{s+t} = \phi_s \circ \phi_t$
3. $\phi_{-t} = \phi_t^{-1}$.

Dans ces conditions, on définit:

Definition 3.10. *Le couple* $(\overline{\Omega}, \Phi)$ *ou plus simplement* ϕ_t *est appelé groupe de difféomorphisme (global) à un paramètre.*

Example 3.1. *Pour tout* M *et* $t \in M$*, l'application* Φ *telle que*

$$\Phi(t,x) = e^t x$$

définie un groupe de difféomorphisme (global) à un paramètre.

Proposition 3.6. *Tout champ de vecteur sur* M *ne génère pas nécessairement un groupe de difféomorphismes (global) à un paramètre.*

Proof. Donnons le contre-exemple suivant: considérons le champ de vecteur sur $\mathbb{R}$:

$$X = x^2 \frac{\partial}{\partial x}.$$

L'équation différentielle associée est:

$$\frac{dx}{dt} = x^2.$$

Puisque

$$d(-1/x) = dt$$

pour la condition initiale $x(0) = x_0 (\neq 0)$, l'équation de la courbe intégrale est:

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - t x_0}.$$

Cette solution n'est pas définie pour $t = 1/x_0$. Donc l'application ϕ_t telle que le point $\frac{x_0}{1-tx_0}$ correspond x_0 n'est pas définie pour $t = 1/x_0$. □

Soit E_X l'ensemble des $(t,x) \in \mathbb{R} \times M$ tel qu'il existe une courbe intégrale $c : I \to M$ de X en x avec $t \in I$.

Definition 3.11. *Le champ de vecteur* X *est complet si* $E_X \subset \mathbb{R} \times M$ *est* $\mathbb{R} \times M$*. En d'autres termes: si le champ de vecteurs génère un groupe de difféomorphismes (global) à un paramètre sur* M*.*

Ainsi, un champ de vecteurs X est complet si et seulement si chaque courbe intégrale peut être étendue de sorte que son domaine devienne $(-\infty, +\infty)$. Donc le champ de vecteurs de l'exemple précédent n'est pas complet. Chaque courbe intégrale n'est pas définie à chaque "instant".

Definition 3.12. *Nous appelons intégrale de* X *l'unique application* $\phi_X : E_X \to M$ *tel que, pour tout* $x \in M$*, l'application* $t \mapsto \phi_X(t,x)$ *est une courbe intégrale à* x *appelée courbe intégrale maximale.*

Definition 3.13. *Si* X *est complet,* ϕ_x *est appelé flot de* X *et* (M, ∞, ϕ_x) *un flot*

Chaque champ de vecteur sur une variété compacte est complet. Cela génère nécessairement un groupe de difféomorphisme global.

Plus généralement: si X est un champ de vecteur de classe $\mathcal{C}^k (k \geq 1)$, si $c : I \to M : t \mapsto c(t)$ est une courbe intégrale maximale de X et si $c((a,b))$ est dans un sous-ensemble compact de M pour tout intervalle ouvert fini (a,b) dans le domaine de c, alors c est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Proposition 3.7. *A chaque groupe de difféornorphisme à un paramètre sur M correspondant un champ de vecteur X appelé champ générateur de groupe.*

Proof. Soient ϕ_t un groupe de difféomorphisme (global) à un paramètre sur M, c une courbe sur M passant par x_0

$$\begin{array}{rcl} c : I \subset \mathbb{R} & \rightarrow & M \\ t & \mapsto & c(t) = \phi_t(x_0) \end{array}$$

et X_0 le vecteur tangent de la courbe en x_0, c'est-à-dire:

$$X_0 = X(x_0) = \frac{d}{dt}c(t)|_0 = \frac{d}{dt}\phi_t(x_0)|_0.$$

Pour tout $x \in c$, il existe un vecteur tangent $X(x)$ aussi noté X_x. En effet,

$$\phi_{t+s}(x) = \phi_t(\phi_s(x_0))$$

et ainsi

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\phi_{t+s}(x_0) &= \frac{d\Phi(t+s,x_0)}{ds} = \frac{d\Phi(t+s,x_0)}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}\phi_{t+s}(x_0) = \frac{d}{dt}\phi_t(\phi_s(x_0)). \end{aligned}$$

Si $t = 0$, on a:

$$\frac{d}{ds}\phi_s(x_0) = \frac{d}{dt}\phi_t(\phi_s(x_0))|_0 = X(\phi_s(x_0)).$$

La dernière quantité n'est rien d'autre que le vecteur tangent $X(x)$ à la courbe au point $x = \phi_s(x_0)$. □

Definition 3.14. *Une orbite d'un groupe à un paramètre est une courbe intégrale d'un champ de vecteur, c'est-à-dire une courbe tangente aux vecteurs du champ X*

3.2.4 Double fibré tangent

Soit TTM le fibré tangent d'un fibré tangent TM de dimension $2n$. Tout élément de TM est une paire (x, X) tel que dans un système de coordonnées local, le vecteur tangent au point $(x^i) \in M$ est noté:

$$X_x = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{avec} \quad y^i = \frac{dx^i}{dt}.$$

Nous noterons tout élément de TM par ces $2n$-coordonnées (x^i, y^i). Ainsi

$$Z = u^i \frac{\partial}{\partial x^i} + v^i \frac{\partial}{\partial y^i}$$

est un vecteur tangent en tout point (x^i, y^i) de TM. De même, un élément de TTM sera noté par ces $4n$-coordonnées (x^i, y^i, u^i, v^i).

Les $2n$ équations différentielles du premier ordre

$$\frac{dx^i}{dt} = u^i(x^j, y^j) \quad \frac{dy^i}{dt} = v^i(x^j, y^j)$$

sont équivalentes aux n équations différentielles du second ordre

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = v^i(x^j, \frac{dx^j}{dt})$$

qui est obtenu en posant $y^i = v^i(x^j, y^j)$.

Soient le champ de vecteur

$$Z : TM \to TTM : (x^i, y^i) \mapsto (x^i, y^i; u^i, v^i)$$

et l'application

$$\Pi_* : TTM \to TM : (x^i, y^i; u^i, v^i) \mapsto (u^i, u^i).$$

On a:

$$(\Pi_* \circ Z)(x^i, y^i) = \Pi_*(x^i, y^i; u^i, v^i) = (x^i, u^i).$$

Posons $u^i = y^i$, dans ce cas, on a:

$$\Pi_* \circ Z : TM \to TM : (x^i, y^i) \mapsto (x^i, y^i).$$

Proposition 3.8. *Une équation différentielle du second ordre sur M est associée à un champ de vecteur Z sur TM ssi*

$$\Pi_* \circ Z = \mathrm{Id}|_{TM}.$$

Remark 3.3. *Au point (x^i), le vecteur tangent d'un point de TM s'exprime par:*

$$(\Pi_* Z)_{(x^i)} = y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

car

$$\begin{aligned} \Pi_* Z &= \Pi_*\Big(u^i \frac{\partial}{\partial x^i} + v^i \frac{\partial}{\partial y^i}\Big) = u^i \Pi_*\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big) + v^i \Pi_*\Big(\frac{\partial}{\partial y^i}\Big) \\ &= u^i \frac{\partial}{\partial x^i} + 0 = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (u^i = y^i). \end{aligned}$$

Remark 3.4. *Une solution d'une équation différentielle du second ordre sur M est une courbe différentiable $c : J \to M : t \mapsto c(t)$ telle que*

$$\dot{c} : J \to TM : t \mapsto \dot{c}(t)$$

est une courbe intégrable de X.