Espace tangent-Fibré tangent

Abdoul Salam DIALLO [1]
Université Alioune DIOP de Bambey
UFR SATIC, Département de Mathématiques
B.P. 30, Bambey, Sénégal

Introduction

L'objectif est de formaliser dans une variété la notion de direction de déplacement ou encore de mouvement possibles à partir d'un point donné. Dans $\mathbb{R}^n$ par exemple les directions possibles à partir d'un point p sont tous les vecteurs de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des déplacement est donc $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ l'ensemble des couples (p, v) formés d'un point de départ p et d'une direction v.
À chaque point d'une variété différentiable M, nous allons associer un espace vectoriel à n dimensions: l'espace tangent à M en ce point. Un progrès décisif dans la géométrie différentielle s'est produit lorsque l'espace tangent a été défini comme une variété sans référence à $\mathbb{R}^n$. Différent des techniques peuvent étre utilisées, par exemple l'approche algébrique utilisant la notion d'idéal, mais nous avons choisi la méthode la plus utilisée par les ingénieurs et les physiciens.

1 Vecteur tangent

Soit M un ensemble déléments appelés points et F un espace vectoriel réel normé de dimension finie.

1.1 Courbes tangentes

Soient M une variété différentielle, p_0 un point de M, et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0.

1.1.1 Courbes

Definition 1.1. *Une courbe différentiable passant par p_0 dans M est une application différentiable*

$$c : I \subset \mathbb{R} \to M : t \mapsto c(t)$$

telle que

$$c(0) = p_0.$$

Ainsi, l'application précédent établit une correspondance entre chaque réel t et un point de M (image de t). On dit que c'est un arc de paramètre t. Nous supposerons que l'application est au moins de classe $\mathcal{C}^1$.

[1]E-mail: abdoulsalam.diallo@uadb.edu.sn

Remark 1.1. *En mécanique, le paramètre réel t est appelé "moment", mais a priori t est un paramètre quelconque.*

Definition 1.2. *Soient c une courbe différentiable sur M et (U, φ) une carte admissible de M. L'image de la courbe c dans la carte (U, φ) est l'application*

$$\begin{aligned} \varphi \circ c : I \subset \mathbb{R} \quad &\rightarrow \quad \mathbb{R}^n \\ t \quad &\mapsto \quad \varphi(c(t)) = (x^1(t), \ldots, x^n(t)) \end{aligned}$$

Remark 1.2. *Les équations paramétriques de la courbes sont notées par:*

$$x^i = x^i(t), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Example 1.1. *Sur la sphère $\mathbb{S}^2$, l'équation de toute courbe est:*

$$x^1 = \theta(t) \quad x^2 = \phi(t), t \in I$$

où x^1, x^2 sont respectivement la colatitude et la longitude. Donc,

- *un parallèle est défini par:*

$$x^2 = \phi(t), \quad (x^1 \quad \textit{étant constante})$$

- *et un méridien est défini par:*

$$x^1 = \theta(t), \quad (x^2 \quad \textit{étant constante})$$

1.1.2 Courbes tangentes

Soient (U, φ) une carte admissible, p_0 un point de M et c_1, c_2 deux courbes de M passant par p_0.

Definition 1.3. *Les courbes c_1 et c_2 sont tangentes en p_0 par rapport à φ si les applications ($I \rightarrow \mathbb{R}^n$) $\varphi \circ c_1$ et $\varphi \circ c_2$ sont tangentes en $0 \in I$:*

$$c_1(0) = c_2(0) = p_0 \quad \textit{et} \quad \frac{d}{dt}(\varphi \circ c_1)(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ c_2)(0).$$

Definition 1.4. *Deux courbes c_1 et c_2 sont tangentes au point p_0 si $c_1(0) = c_2(0) = p_0$ et si il existe une carte admissible (U, φ) telle que $p_0 \in U$ et*

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ c_1)(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ c_2)(0).$$

Remark 1.3. *Cette définition est indépendante de la carte choisie.*

Proposition 1.1. *Soit $(U_i, \varphi_i)_{i=1,2}$ deux cartes admissibles de M. Deux courbes c_1, c_2 sont tangentes en p_0 par rapport à φ_1 si et seulement si elles sont tangentes en p_0 par rapport à φ_2.*

Proof. Montrons la condition nécessaire, c'est-à-dire:

$$\frac{d}{dt}(\varphi_1 \circ c_1)(0) = \frac{d}{dt}(\varphi_1 \circ c_2)(0) \Rightarrow \frac{d}{dt}(\varphi_2 \circ c_1)(0) = \frac{d}{dt}(\varphi_2 \circ c_2)(0).$$

En prenant des restrictions (si nécessaire), on choisit $U_1 = U_2$. Dans ce cas, on a:

$$\varphi_2 \circ c_1 = (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) \circ (\varphi_1 \circ c_1).$$

En appliquant le théorème des applications composées différentiables, on a:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\varphi_2 \circ c_1)(0) &= \frac{d}{dt}[(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) \circ (\varphi_1 \circ c_1)](0) \\
&= \frac{d}{dt}[(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})]_{(\varphi_1 \circ c_1)(0)} \circ \frac{d}{dt}(\varphi_1 \circ c_1)(0) \\
&= \frac{d}{dt}[(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})]_{(\varphi_1 \circ c_2)(0)} \circ \frac{d}{dt}(\varphi_1 \circ c_2)(0) \\
&= \frac{d}{dt}[(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) \circ (\varphi_1 \circ c_2)](0) \\
&= \frac{d}{dt}(\varphi_2 \circ c_2)(0).
\end{aligned}$$

L'inverse est prouvé de manière analogique. □

Par conséquent deux courbes c_1 et c_2 sont tangentes en $p_0 \in M$, (en $t = 0$) si elle sont tangentes en p_0 par rapport à toute carte locale.
Cette proposition signifie que la tangence des courbes en un point est indépendante de la carte utilisée et que cette notion est bien définie. Alors on dit:

Definition 1.5. *Deux courbes c_1 et c_2 sont tangentes en p_0 si*

$$c_1(0) = c_2(0) = p_0 \quad \textit{et} \quad \frac{d}{dt}(\varphi \circ c_1)(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ c_2)(0).$$

En coordonnées locales on note:

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ c_1)(t) &= (x^1(t), \ldots, x^n(t)) \\
(\varphi \circ c_2)(t) &= (y^1(t), \ldots, y^n(t))
\end{aligned}$$

Nous pouvons lire les courbes en utilisant:

$$\begin{aligned}
\varphi \circ c_1 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n : t \mapsto (x^1(t), \ldots, x^n(t)) \\
\varphi \circ c_2 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n : t \mapsto (y^1(t), \ldots, y^n(t)).
\end{aligned}$$

Le point p_0 étant commun aux deux courbes, il est évident que:

$$(x^1(0), \ldots, x^n(0)) = (y^1(0), \ldots, y^n(0))$$

qui est noté

$$x^i(0) = y^i(0) \quad i = 1, \ldots, n.$$

La définition précédente est exprimée dans le contexte des coordonnées locales comme suit: les courbes précédentes c_1 et c_2 tangentes au point p_0, dans M sont telles que: $\forall i = 1, \ldots, n$

$$x^i(0) = y^i(0) \quad \text{et} \quad \frac{dx^i}{dt}(0) = \frac{dy^i}{dt} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Example 1.2. *Dans M, les courbes définies par les trois équations paramétriques suivantes $(i = 1, \ldots, n), \forall c(i) \in \mathbb{R}$ et $k(i) \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{array}{rcl} x^i(t) & = & c(i)t \\ y^i(t) & = & k(i)t^3 + c(i)t \\ z^i(t) & = & c(i)(t^2 + t) \end{array}$$

passe par le même point en $t = 0$. De plus, ils ont le même vecteur tangent car

$$\frac{dx^i}{dt}(0) = \frac{dy^i}{dt}(0) = \frac{dz^i}{dt}(0) = c(i) \quad i = 1, \ldots, n.$$

1.2 Germes de fonctions différentiables

Soient $p_0 \in M$ et $\mathcal{C}^\infty(p_0)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage ouvert de p_0. Soient $g, h \in \mathcal{C}^\infty(p_0)$.

Definition 1.6. *On dit que g et h ont le même germe en p_0 s'il existe un voisinage ouvert U de p_0 tel que $g|_U = h|_U$.*

Nous obtenons ainsi une relation d'équivalence en $\mathcal{C}^\infty(p_0)$. Nous disons:

Definition 1.7. *Un germe différentiable de la fonction g, en p_0, est la classe d'équivalence des fonctions différentiables qui coincide dans un voisinage ouvert U de p_0.*

L'ensemble des germes de fonction différentiables dans un voisinage ouvert U de p_0 est noté par $O(U)$.

1.3 Vecteurs tangents

1.3.1 Première définition

Soit $p_0 \in U$ et (U, φ) une carte de M. Une classe d'équivalence de courbes tangentes en $p_0 \in M$ et notée par

$$[c]_{p_0}$$

où c est un répresentant de la classe.

Definition 1.8. *Un vecteur tangent à M en p_0 est une classe d'équivalence de courbes tangentes en p_0.*
On dit que les courbes de la classe d'équivalence ont le même vecteur tangent en p_0.

Ce vecteur est aussi noté

$$\dot{x}(0)$$

en se référant à la mécanique et plus particulièrement au vecteur vitesse d'une courbe sur la surface.

1.3.2 Fonction le long d'une courbe et tangente.

Soit $p_0 \in U \subset M$.

Definition 1.9. *La fonction g le long d'une courbe c est la fonction*

$$g \circ c : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto (g \circ c)(t).$$

Proposition 1.2. *Deux courbes c_1 et c_2 ont le même vecteur tangent au point $p_0 \in U$ si et seulement si $\forall g \in O(U)$*

$$\frac{d}{dt}(g \circ c_1)(0) = \frac{d}{dt}(g \circ c_2)(0)$$

en d'autre terme si et seulement la dérivé de g le long de c_1 en p_0 est égale à la dérivé de g le long de c_2 en p_0.

Proof. Soit g la fonction le long de c. On a:

$$g \circ c = (g \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ c).$$

Sa dérivé en p_0 est:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(g \circ c)(0) &= \frac{d}{dt}[(g \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ c)](0) \\ &= \frac{d}{dt}(g \circ \varphi^{-1})_{(\varphi \circ c)(0)} \frac{d}{dt}(\varphi \circ c)(0). \end{aligned}$$

Par conséquent, l'équivalence suivante:

$$\frac{d}{dt}(g \circ c_1)(0) = \frac{d}{dt}(g \circ c_2)(0) \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\varphi \circ c_1)(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ c_2)(0)$$

prouve la proposition. □

Proposition 1.3. *Toutes les courbes c_k tangentes en p_0 de M, c'est-à-dire ayant le même vecteur tangent à p_0, sont caractérisées par une même valeur:*

$$\frac{d}{dt}(g \circ c_k)(0).$$

Toutes ces courbes seront désignées par c.

La fonction g lue sur une carte est la fonction suivante exprimée en coordonnées locales par

$$g \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x^1, \ldots, x^n) \to (g \circ \varphi^{-1})(x^1, \ldots, x^n) \equiv \bar{g}(x^i), i = 1, \ldots, n$$

Proposition 1.4. *La fonction g le long de c*

$$g \circ c = (g \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ c)$$

représente la lecture de la courbe c dans la carte suivi de la lecture de g sur la carte.

Proposition 1.5. *Un vecteur tangent à M, en p_0, c'est-à-dire une classe d'équivalence des courbes c, présente la même valeur $\forall g \in O(U)$:*

$$\frac{d}{dt}(g \circ c)(0) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial x^i}\right)_{x_0} \frac{dx^i}{dt}(0)$$

où $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$ est le système de coordonnées de p_0.

Proof. A partir de

$$\begin{aligned} (g \circ c)(t) &= \Big\{(g \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ c)\Big\}(t) \\ &= \big\{g \circ \varphi^{-1}\big\}\Big((\varphi \circ c)(t)\Big) \\ &= \big\{g \circ \varphi^{-1}\big\}(x^1(t), \ldots, x^n(t)) \end{aligned}$$

et en utilisant la règle de dérivations des fonctions composées, on obtient:

$$\frac{d}{dt}(g \circ c)(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(g \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(x_0)\frac{dx^i}{dt}(0) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial x^i}\right)_{x_0} \frac{dx^i}{dt}(0)$$

□

Remark 1.4. *Précisez que les courbes c sont tangentes en un point si, dans une carte, elles conduisent à la même valeur*

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ c)(0)$$

en d'autre termes, elles ont les mêmes valeurs successives

$$\frac{dx^i}{dt}(0), \quad i = 1, \ldots, n$$

pour chaque courbes.

1.3.3 Dérivation au sens de Leibniz

Nous allons interpréter un vecteur tangent en un point p_0 comme une application à valeur réelle de dérivation définie sur l'ensemble $O(U)$ des germes de fonction différentiable dans un voisinage ouvert U de p_0.

Definition 1.10. *Une application linéaire*

$$\begin{aligned} X_{p_0} : O(U) &\to \mathbb{R} \\ g &\mapsto X_{p_0}(g) \end{aligned}$$

est dite dérivation au sens de Leibniz si $\forall a, b \in \mathbb{R}$ et $f, g \in O(U)$

$$\begin{aligned} X_{p_0}(af + bg) &= aX_{p_0}(f) + bX_{p_0}(g) \\ X_{p_0}(fg) &= f(p_0)X_{p_0}(g) + g(p_0)X_{p_0}(f). \end{aligned}$$

Definition 1.11. *La dérivée de g en p_0 dans une direction tangentielle associée à X_{p_0} est le réel*

$$X_{p_0}(g) = \frac{d}{dt}(g \circ c)(0)$$

pour une classe d'équivalence de courbes $[c]$.

En coordonnées locales la dérivée de g en p_0 dans une direction tangentielle est exprimée par

$$X_{p_0}(g) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial x^i}\right)_{x_0} \frac{dx^i}{dt}(0)$$

Remark 1.5. *Considérons la fonction différentiable en p_0*

$$x^i : M \to \mathbb{R} : x \mapsto x^i.$$

On a:

$$X_{p_0}(x^i) = \frac{dx^i}{dt}(0)$$

qui est notée par X^i. Ainsi la la dérivée de g en p_0 dans une direction tangentielle est

$$X_{p_0}(g) = \sum_{i=1}^{n} X^i \left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial x^i}\right)_{x_0}.$$

Remark 1.6. *Pour toute fonction constante l, on a:*

$$X_{p_0}(l) = 0.$$

En effet, introduisons la fonction identité 1.

$$\begin{aligned} X_{p_0}(l) &= lX_{p_0}(1) \quad \textit{par la linéarité de} \quad X_{p_0} \\ &= l[X_{p_0}(1)1 + 1X_{p_0}(1)] \quad \textit{par la règle de Leibniz} \\ &= 2lX_{p_0}(1) \\ &= 2X_{p_0}(l) \quad \textit{par la linéarité de} \quad X_{p_0}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on doit avoir $X_{p_0}(l) = 0$.

Remark 1.7. *Pour toute fonction constante l et $\forall g \in O(U)$*

$$X_{p_0}(lg) = lX_{p_0}(g).$$

1.3.4 Deuxième définition d'un vecteur tangent

Proposition 1.6. *Un vecteur tangent est une dérivation au sens de Leibniz*

Proof. Soit un vecteur tangent vue comme une classe d'équivalence $[c]_{p_0}$ tel que la valeur de la dérivée de g le long de c en p_0 est

$$\frac{d}{dt}(g \circ c)(0).$$

L'application

$$\begin{array}{rcl} O(U): & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & \frac{d}{dt}(g \circ c)(0) \end{array}$$

est

- linéaire: $\forall k \in \mathbb{R}, \forall g_1, g_2 \in O(U)$

$$\begin{aligned} kg \mapsto \frac{d}{dt}(kg \circ c)(0) &= k\frac{d}{dt}(g \circ c)(0) \\ \frac{d}{dt}\big((g_1 + g_2) \circ c\big)(0) &= \frac{d}{dt}(g_1 \circ c)(0) + \frac{d}{dt}(g_2 \circ c)(0) \end{aligned}$$

- une dérivation:$\forall g_1, g_2 \in O(U)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\big((g_1 g_2) \circ c\big)(0) &= \frac{d}{dt}\big((g_1 \circ c)(g_2 \circ c)\big)(0) \\ &= \frac{d}{dt}(g_1 \circ c)(0) g_2(c(0)) + g_1(c(0))\frac{d}{dt}(g_2 \circ c)(0). \end{aligned}$$

□

Réciproquement, on a:

Proposition 1.7. *Toute dérivation dans $O(U)$ est un vecteur tangent en p_0.*

Notons X_{p_0} cette dérivation. Soient $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ un système de coordonnée local d'un point $p_0 \in U$ et $(x^1, \ldots, x^n)$ un système de coordonnée local d'un point voisin $p \in U$. Rappelons que le réel

$$\bar{g}(x^i) \quad i = 1, \ldots, n$$

désigne l'image de p par $g \circ \varphi^{-1}$.

On a le lemme suivant: étant donnée $g \in O(U)$, ils existent n fonctions $g_j \in O(U)$ telles que:

$$\bar{g}(x^1, \ldots, x^n) = \bar{g}(x_0^1, \ldots, x_0^n) + \sum_{j=1}^{n}(x^j - x_0^j) \cdot \bar{g}_j(x^1, \ldots, x^n).$$

Prouvons la proposition précédente:
Les fonctions étant répresentées par l'image des points sur lesquels elles opèrent et par les propriétés de linéarité et dérivation de l'opérateur

$$X_{p_0} : O(U) \to \mathbb{R} : g \mapsto X_{p_0}(g)$$

nous avons ce qui suit conformément à l'utilisation qui identifie l'image de tout point avec la fonction:

$$\begin{aligned} X_{p_0}[\bar{g}(x^1, \ldots, x^n)] &= X_{p_0}[\bar{g}(x_0^1, \ldots, x_0^n)] + \sum_{j=1}^{n} X_{p_0}[(x^j - x_0^j) \cdot \bar{g}_j(x^1, \ldots, x^n)] \\ &= 0 + \sum_{j=1}^{n}(x_0^j - x_0^j) X_{p_0}[\bar{g}_j(x^1, \ldots, x^n)] \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} \bar{g}_j(x_0^1, \ldots, x_0^n) X_{p_0}(x^j - x_0^j). \end{aligned}$$

Or on a:

$$\bar{g}_j(x_0^1,\ldots,x_0^n)=\frac{\partial \bar{g}}{\partial x^j}(x_0^1,\ldots,x_0^n).$$

Ainsi

$$X_{p_0}[\bar{g}(x^1,\ldots,x^n)]=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \bar{g}}{\partial x^j}(x_0^1,\ldots,x_0^n)X_{p_0}(x^j).$$

En utilisant à nouveau l'écriture habituelle des fonctions, on obtient

$$X_{p_0}(g)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \bar{g}}{\partial x^j}(x_0)X_{p_0}(x^j).$$

Nous retrouvons l'expression de la définition du vecteur tangent en p. Conséquence, Nous avons aussi la deuxième définition suivante qui est équivalente à la première.

Definition 1.12. *Un vecteur tangent en M en p_0 est une application linéaire de dérivation*

$$X_{p_0}: O(U)\to\mathbb{R}: g\mapsto X_{p_0}(g)$$

2 Espace tangent

2.1 Définition d'un espace tangent

Definition 2.1. *Soit p_0 un point d'une variété différentiable. L'espace tangent de M en p_0 est l'ensemble des classes d'équivalentes des courbes tangentes en p_0.*

C'est l'ensemble des vecteurs tangents en $p_0\in M$. On le note $T_{p_0}M$. De façon équivalence, on écrit

$$T_{p_0}M=\{[c]_{p_0}\}=\{X_{p_0}\}$$

où X_{p_0} est un représentant des vecteurs tangents en p_0 (de composantes $X^i=\frac{dx^i}{dt}(0)$).

2.2 Bases d'un espace tangent

On note par $X_{p_0}g$ la dérivée de g dans la direction tangentielle X en p_0. Rappellons que

$$X_{p_0}g=\sum_{i=1}^{n}X^i\Big(\frac{\partial g}{\partial x^i}\Big)_0$$

Un vecteur tangent en p_0 dans la direction correspondante à X^i s'exprime

$$X_{p_0}=X^i\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)_0,\quad i=1,\ldots,n.$$

Proposition 2.1. *Les vecteurs tangents en un point d'une variété différentielle M forme un espace vectoriel de dimension n.*

Proof. L'expression

$$X_{p_0} = X^i\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)_0, \quad i = 1, \dots, n.$$

montre que chaque vecteur X_{p_0} est une combinaison linéaire d'au moins n vecteurs tangents en p_0 qui sont définis par

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)_0 : O(U) \to \mathbb{R} : g \mapsto \Big(\frac{\partial g}{\partial x^i}\Big)_0.$$

Ces vecteurs forment un système générateur de l'espace tangent. Par conséquent, la dimension de l'espce tangent en p_0 est au moins n. De plus, les vecteurs $\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)_0$ sont linéairement indépendants. En effet, s'ils étaient dépendant, ils existeraient des réels α_i non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)_0 = 0.$$

Mais de tels α_i n'existe pas, car pour toute fonction $x^i : x \to x^j$, on a:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Big(\frac{\partial x^j}{\partial x^i}\Big)_0 = 0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_i^j = \alpha_j \Rightarrow \alpha_j = 0, \forall j.$$

On conclut que $\dim T_{p_0} M = n$. □

Definition 2.2. *Les n opérateurs*

$$e_i = \Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)_0$$

forment une base appelée base naturelle de $T_{p_0}M$ associé à un système de coordonnées locales.

Les n composantes du vecteur X_{p_0} par rapport à la base $\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)_0$ sont les réels X^i. On note:

$$X_{p_0} = X^i\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)_0 = X^i e_i.$$

Example 2.1. *Soit $M = \mathbb{S}^2$. Un vecteur tangent $X_{p_0} \in T_{p_0}M$ est une combinaison linéaire des vecteurs tangents e_i. En effet, les coordonnées i.e les méridiens et les parallèles sont respectivement*

$$\begin{cases} x^1 &=& \theta(t) \\ \phi &=& \phi_0 \ (constante) \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 &=& \phi(t) \\ \phi &=& \phi_0 \ (constante) \end{cases}$$

Tout vecteur tangent à une courbe sur $M = \mathbb{S}^2$ en p_0, s'écrit

$$\frac{dx^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2$$

explicement on obtient:

$$\frac{d\theta}{dt}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{d\phi}{dt}\frac{\partial}{\partial \phi}.$$

Donc la somme d'un vecteur tangent à une parallèle (θ constante)

$$\frac{d\phi}{dt}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

et d'un vecteur tangent à une méridienne (ϕ constante)

$$\frac{d\theta}{dt}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

est un vecteur tangent à la sphère $\mathbb{S}^2$.

2.3 Changement de bases

Tout vecteur tangent de $T_{p_0}M$ peut être exprimer dans une autre base différente à celle qui est associée au système de coordonnées locales (x^i).

Dans T_{p_0}, on considère les n vecteurs de bases e^i_j qui sont combinaisons linéaires des $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_0$. Soient α et β des matrices inverses. On a:

$$e^i_j = \alpha^i_j\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_0 = \beta^j_i e^i_j.$$

Soit $X_0 \in T_{p_0}M$, on a:

$$X_0 = X'^j e^i_j = X'^j\alpha^i_j\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_0 \quad \text{et} \quad X_0 = X'\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_0 = X'\beta^j_i e^i_j.$$

Par comparaison, on obtient:

$$X' = X'^j\alpha^i_j \quad \text{et} \quad X'^j = X'\beta^j_i.$$

Plus simplement, soit le changement de bases naturelles $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_0 \leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x'^j}\right)_0$. La règle classique de calcul aux dérivées partielles implique:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x'^j}\right)_0 = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_0\left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\right)_0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_0 = \left(\frac{\partial}{\partial x'^j}\right)_0\left(\frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\right)_0.$$

Ainsi

$$X_0 = X'^j\left(\frac{\partial}{\partial x'^j}\right)_0 = X'^j\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_0\left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\right)_0 \quad \text{et} \quad X_0 = X^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_0 = X^i\left(\frac{\partial}{\partial x'^j}\right)_0\left(\frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\right)_0.$$

Par conséquent, nous obtenons les formules

$$X^i = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\right)_0 X'^j \quad \text{et} \quad X'^j = \left(\frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\right)_0 X^i.$$

3 Differentiel en un point

Soient M et N des variétés différentibles. Soit f une application différentiable de M sur N. Soient X_0 un vecteur tangent à M en un point $x_0 \in M$, $z_0 = f(x_0)$ l'image de x_0 par f dans N et W un ouvert de N contenant z_0.

3.1 Définitions

Soit $f^* : \mathcal{C}^\infty(N,\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}) : h \mapsto f^*h$ l'application qui associe à toute fonction h de N le pull back de h par f.

Definition 3.1. *La différentielle de f en un point $x_0 \in M$ est l'application linéaire*

$$df_{x_0} : T_{x_0}M \to T_{z_0}N : X_0 \mapsto df_{x_0}X_0$$

telle que $\forall h \in O(U)$

$$df_{x_0}X_0(h) = X_0(f^*h).$$

Le vecteur $df_{x_0}X_0$ tangent à N en z_0 est appelé image du vecteur tangent X_0 par f. Si l'image de X_0 par f est Z_0, on écrit

$$Z_0(h) = X_0(f^*h).$$

Remark 3.1. *La linéarité de la différentielle, c'est-̀-dire: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ et $\forall X_0', X_0'' \in T_{x_0}M$, on a:*

$$df_{x_0}(aX_0' + bX_0'') = adf_{x_0}X_0' + bdf_{x_0}X_0''$$

vient directment de la linéarité du vecteur tangent X_0. En effet, $\forall h \in O(W)$:

$$\begin{aligned} df_{x_0}(aX_0' + bX_0'')(h) &= (aX_0' + bX_0'')(f^*h) \\ &= aX_0'(f^*h) + bX_0''(f^*h) \\ &= adf_{x_0}X_0'(h) + bdf_{x_0}X''0(h) \\ &= (adf_{x_0}X_0' + bdf_{x_0}X_0'')(h). \end{aligned}$$

Remark 3.2. *(Immersion-submersion)*

1. *Une application différentiable $f : M \to N$ est une immersion (respectivement submersion) en $x_0 \in M$ si et seulement si sa différentielle df_{x_0} est injective (respectivement surjective).*

2. *Une application différentiable $f : M \to N$ est un difféomorphisme local en $x_0 \in M$ si et seulement si sa différentielle df_{x_0} est un isomorphisme.*

Remark 3.3. *La notion de différentielle est bien définie puisque l'image $Z_0 = df_{x_0}X_0$ est indépendante du choix des courbes c définissant X_0. En effet, soit*

$$df_{x_0} : T_{x_0}M \to T_{z_0}N : [c]_{x_0} \mapsto [f \circ c]_{f(x_0)}$$

la différentielle de f en $x_0 \in M$. Montrons si deux courbes c_1 et c_2 sont tangentes en x_0 alors leurs images $f \circ c_1$ et $f \circ c_2$ sont aussi tangentes en $f(x_0) = z_0$. Soient (U, φ) et (U', φ') deux cartes locales de M et N. On a:

$$\begin{aligned} \varphi' \circ f \circ c_1 &= (\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ c_1) \\ \varphi' \circ f \circ c_2 &= (\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ c_2). \end{aligned}$$

Mais les courbes c_1 et c_2 sont tangentes, il vient que:

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ c_1)(t_0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ c_2)(t_0).$$

Par le théorème de composée d'applications différentiables, on a:

$$\frac{d}{dt}(\varphi' \circ f \circ c_1)(t_0) = \frac{d}{dt}(\varphi' \circ f \circ c_2)(t_0).$$

Cette dernière relation exprime que les courbes $f \circ c_1$ et $f \circ c_2$ sont tangentes.

3.2 L'image en coordonnées locales

Soient x^i les m composantes du point x_0 dans une carte de M. L'application différentiable f fait correspondre à toute carte de M une carte de N conformément avec

$$z^j = f^j(x^i)$$

où les z^j sont les n coordonnées locales du point $z_0 = f(x_0)$.

Éxplicitons en coordonnées locales la définition du différentiel df_{x_0}. L'égalité

$$Z_0(h) = X_0(h \circ f)$$

ayant permis d'introduire l'image Z_0 du vecteur tangent sécrit:

$$\begin{aligned} Z^j \frac{\partial h}{\partial z^j}|_{z_0} &= X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(h \circ h)|_{x_0} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} h(f^j(x^i))_{x_0} \\ &= X^i \frac{\partial h}{\partial z^j}|_{z_0} \frac{\partial f^j}{\partial x^i}|_{x_0}. \end{aligned}$$

Donc les composantes du vecteur tangent Z_0 (image de X_0 par df_{x_0}) sont:

$$Z^j = \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(x_0) X^i.$$

Notons que la matrice $\left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i}\right)_{x_0}$ représentant df_{x_0} est la matrice jacobienne définissant le différentiel de l'application correspondante $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

En conclusion, l'image de X_0 s'exprime dans la base naturelle de $T_{z_0}N$ sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} df_{x_0} X_0 &= (df_{x_0} X_0)^j \frac{\partial}{\partial z^j}|_{z_0} = Z^j \frac{\partial}{\partial z^j}|_{z_0} \\ &= \frac{\partial f^j}{\partial x^i}|_{x_0} X^i \frac{\partial}{\partial z^j}|_{z_0}. \end{aligned}$$

3.3 Différentielle d'une fonction

Soit U un ouvert de M contenant x_0. Appliquons la notion précédente au cas d'une fonction $g \in O(U)$. La différentielle en x_0 de g est l'application linéaire

$$dg : T_{x_0}M \to T_{g(x_0)}\mathbb{R}; X_0 \mapsto dg_{x_0} X_0$$

telle que $\forall h \in \mathcal{C}^\infty(g(x_0))$

$$\begin{aligned} dg_{x_0} X_0(h) &= X_0(g^* h) = X_0(h \circ g) \\ &= X^i \Big(\frac{\partial (h \circ g)}{\partial x^i}\Big)_{x_0} = X^i \Big(\frac{dh}{dt}\Big)_{g(x_0)} \Big(\frac{\partial g}{\partial x^i}\Big)_{x_0} \quad \text{avec} \quad t = g(x) \\ &= X_0 g \Big(\frac{dh}{dt}\Big)_{g(x_0)}. \end{aligned}$$

En conclusion, nous obtenons le resultat suivant:

$$dg_{x_0} X_0 = X_0 g \Big(\frac{d}{dt}\Big)_{g(x_0)}.$$

Puisque dgX_0 est un vecteur de $\mathbb{R}$ (et n'a donc qu'une seule composante) il est identifié à sa composante qui est le vrai X_0g.

Par conséquent, nous pouvons dire ce qui suit.

Proposition 3.1. *La dérivée de la fonction g dans la direction du vecteur X_0 est l'image de X_0 par le différentiel de g en x_0.*

4 Fibré tangent

Dans la suite, il sera nécessaire de considérer ("simultanément") l'ensemble de tous les vecteurs tangents à tous les points de la variété. Nous allons introduire une variété avec un espace vectoriel attaché à chaque point $p, q, \ldots$, et cela sera appelé: "fibré tangent". Une telle situation peut être facilement schématisÃ©e dans le cas d'une variété unidimensionnel.

Les intersections d'espaces tangents n'ayant aucune signification, il conviendra de représenter ces espaces par des lignes parallèles (verticales par exemple).

4.1 Fibration

Definition 4.1. *Un préfibré ou espace au dessus de la variété B de classe $\mathcal{C}^r$ est un triplet (E, B, π) où E est une variété de classe $\mathcal{C}^r$, π un morphisme de E sur B. La variété B est appelée base, la variété E est l'espace total et π le morphisme du préfibré.*

Definition 4.2. *Soient $\lambda_1 = (E_1, B_1, \pi_1)$ et $\lambda_2 = (E_2, B_2, \pi_2)$ deux préfibrés de classe $\mathcal{C}^r$. Un morphisme de λ_1 dans λ_2 est un couple (f, g) tel que:*

1. *f est un morphisme de E_1 dans E_2;*
2. *g est un morphisme de B_1 dans B_2;*
3. *$\pi_2 \circ f = g \circ \pi_1$.*

En d'autres termes, on a le diagramme suivant qui commute:

Remark 4.1. *On dit que le morphisme de préfibrés (f, g) est un isomorphisme si f et g sont bijectives et (f^{-1}, g^{-1}) est un morphisme du préfibré λ_2 dans le préfibré λ_1.*

Remark 4.2. *Si $B_1 = B_2 = B$ et $g = \mathrm{Id}_B$ et si (f, Id_B) est un morphisme, on dit que f est un B-morphisme.*

Definition 4.3. *Une fibration ou un fibré de classe $\mathcal{C}^r$ est un préfibré $\lambda = (E, B, \pi)$ vérifiant la propriété suivante dite de trivialisation locale: pour tout $b \in B$, il existe un voisinage ouvert U de b dans B, une variété F est un isomorphisme φ du préfibré $(\pi(U), U, \pi)$ sur le préfibré trivial $(U \times F, U, pr_1)$.*

Si $\lambda = (E, B, \pi)$ est une fibration, alors B est la base, E l'espace total et π la projection de λ.

Proposition 4.1. *Si $\lambda = (E, B, \pi)$ est une fibration alors π est une submersion et par conséquant pour tout $b \in B$, $(\pi^{-1}(b))$ est une sous-variété fermée de E. Elle est la fibre de b.*

Proof. Soient $x \in E$ et $b = \pi(x) \in B$. La propriété de trivialisation locale montre qu'il existe un voisinage ouvert U de b dans B, une variété F, un isomorphisme $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times F$ tels que $\pi \circ \varphi = pr_1$, ce qui traduit que π est une submersion. Le reste découle du théorème de submersion. $\square$

Remark 4.3. *Si toutes les fibres de $\lambda = (E, B, \pi)$ sont isomorphes à une même variété F, on dit que E est un espace fibré de fibre type F.*

Example 4.1. *Si B et F sont des variétés de classe $\mathcal{C}^r$ alors la fibration $(B \times F, B, pr_1)$ est dite fibration triviale.*

Example 4.2. *Si $\lambda_1 = (E_1, B_1, \pi_1)$ et $\lambda_2 = (E_2, B_2, \pi_2)$ sont deux préfibrés (respectivement deux fibrés) de classe $\mathcal{C}^r$ alors $(E_1 \times E_2, B_1 \times B_2, pr_1 \times pr_2)$ est un préfibré (respectivement fibré).*

Example 4.3. *Si $\lambda_1 = (E_1, B, \pi_1)$ et $\lambda_2 = (E_2, B, \pi_2)$ sont deux préfibrés (respectivement deux fibrés) de classe $\mathcal{C}^r$, de même base B. Posons:*

$$E_1 \times_B E_2 = \{(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2; \pi_1(x_1) = \pi_2(x_2)\}.$$

Si $E_1 \times_B E_2$ est une sous-variété de $E_1 \times E_2$ (ce qui est le cas si λ_1 et λ_2 sont des fibrés), alors $(E_1 \times_B E_2, B, \pi_1 \circ \pi_2)$ est un préfibré (respectivement une fibration).

Proposition 4.2. *Soient $\lambda = (E, B, \pi)$ un préfibré, B_1 une variété et g un morphisme de B_1 sur B. Posons:*

$$E_1 = E \times_B B_1 = \{(x, b_1) \in E \times B_1; \pi(x) = g(b_1); \pi_1 = pr_2/E_1;\ f = pr_1/E_1\}.$$

Alors on a: si E_1 est une sous-variété de $E \times B_1$ alors $\lambda_1 = (E_1, B_1, \pi_1)$ est un préfibré et (f, g) un morphisme de préfibrés de λ_1 dans λ. Le préfibré λ_1 est appelé l'image réciproque de λ par g.

Proposition 4.3. *Soit $\lambda = (E, B, \pi)$ une fibration et g un morphisme d'une variété B_1 dans B. Avec les notations précédentes $\lambda_1 = (E_1, B_1, \pi_1)$ est une fibration appelée fibration réciproque de λ par g. On la note $g^*(\lambda)$. De plus le couple (f, g) vérifie la propriété universelle suivante: pour tout morphisme (h, g) d'une fibration $\lambda' = (E', B_1, \pi_1')$ d base B_1 dans la fibration λ, il existe un unique B_1-morphisme $\bar{h}$ de λ' dans λ_1 tel que le diagramme suivant commute:*

Definition 4.4. *Une fibration $\lambda = (E, B, \pi)$ est dite trivialisable s'il existe une variété F un isomorphisme g de λ sur le fibré trivial $\lambda' = (B \times F, B, pr_1)$. L'isomorphisme g est alors appelé une trivialisation de λ.*

Definition 4.5. *Si $\lambda = (E, B, \pi)$ est une fibration, on appelle section de λ tout morphisme s de B dans E tel que $\pi \circ s = \mathrm{Id}_B$.*

Proposition 4.4. *Tout fibré trivialisable admet une section.*

Proof. Soit $\lambda = (E, B, \pi)$ est une fibration trivialisable; il existe une variété F et un isomorphisme g de E sur $B \times F$. Soit $c \in F$; posons i_c l'application de B dans $B \times F$ définie par $i_c(b) = (b, c)$ alors $s = g^{-1} \circ i_c$ est une section de λ. $\square$

Remark 4.4. *Une fibration peut admettre des sections sans être trivialisable.*

4.2 Fibrés vectoriels

4.2.1 Définitions-Propriétés

Definition 4.6. *Soit $\lambda = (E, B, \pi)$ un fibré. On dit que λ est un fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$ ou un $\mathbb{K}$-fibré vectoriel si pour tout $b \in B$, la fibre $E_b = \pi^{-1}(b)$ est munie d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel et qu'il existe un voisinage ouvert U de b dans B, un espace de Banach F et un difféomorphisme $\phi : U \times F \to \pi^{-1}(U)$ tel que:*

1. *$\pi \circ \phi = pr_1$ où $pr_1 : U \times F \to U$ désigne la première projection;*
2. *pour tout $q \in U$, l'application $\phi_q : F \to E_q$ est un $\mathbb{K}$-isomorphisme linéaire où $\phi_q(\xi) = \phi(q, \xi)$.*

Le triplet (U, ϕ, F) est une carte vectorielle de λ. Le dimension de F (finie ou non) est appelée rang de λ en b. On dit que λ est de rang fini s'il est de rang fini en tout point de b.

Deux cartes vectorielles (U, ϕ, F) et (U', ϕ', F') de (E, B, π) sont dites $\mathcal{C}^r$ compatibles s'il existe une application θ de classe $\mathcal{C}^r$ de $U \cap U'$ dans $L(F, F')$ l'ensemble des applications linéaires continues de F dans F', telle que

$$\phi_b = \phi'_b \circ \theta(b) \quad \text{pour tout} \quad b \in U \cap U'.$$

Un atlas vectoriel de classe $\mathcal{C}^r$ de E est un ensemble de cartes vectorielles de (E, B, π) deux à deux $\mathcal{C}^r$-compatibles dont les domaines recouvrent B.

Si λ est un $\mathbb{K}$-fibré vectoriel, nous dirons simplement que λ est un fibré vectoriel.

Si pour tout b, λ est de même rang fini k, nous dirons que λ est de rang k.

Example 4.4. *Soit le fibré trivial $(B \times \mathbb{R}^n, pr_1)$. Les fibres sont de la forme $\{p\} \times \mathbb{R}^n$. On a:*

$$\begin{aligned} (p, x) + (p, y) &= (p, x + y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \\ \alpha \cdot (p, x) &= (p, \alpha \cdot x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad et \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Example 4.5. *Soit B une variété de classe $\mathcal{C}^r$, alors (TB, B, P) est un fibré vectoriel.*

Definition 4.7. *Soient (E, B, π) et (E', B', π') deux fibrés vectoriels. On dit qu'un couple de morphismes (f, g) est un morphisme de fibrés vectoriels si $\pi' \circ f = g \circ \pi$ et $f_p = f|_{E_p} : E_p \to E'_{g(p)}$ est linéaire pour tout $p \in B$.*
Si $B = B'$ alors une application $f : E \to E'$ est un morphisme si (f, Id) est un morphisme de fibrés vectoriels. On dit que f est un isomorphisme si f^{-1} existe et f et f^{-1} sont des morphismes.

Example 4.6. *Soient M et M' deux variétés de classe $\mathcal{C}^r(r \geq 2)$ et f une application de classe $\mathcal{C}^r$ de M dans M'. Alors (f, Tf) est un morphisme de $\mathcal{C}^{r-1}$ du fibré (TM, M) dans le fibré (TM', M').*

Proposition 4.5. *Soient $\lambda = (E, B, \pi)$ et $\lambda' = (E', B', \pi')$ deux fibrés vectoriels et (f, g) un morphisme de λ dans λ'. Pour tout $b \in B$, il existe un voisinage ouvert U de b dans B, un voisinage ouvert U' de $b' = g(b)$ tel que $g(U) \subset U'$, deux espaces de Banach F et F' et des isomorphismes ϕ et ϕ' de $\pi^{-1}(U) \to U \times F$ et $\pi'^{-1}(U') \to U' \times F'$*

4.2.2 Sections d'un fibré vectoriel

4.2.3 Fibré dual

4.2.4 Fibré produit tensoriel

4.3 Fibré tangent

Soit M une variété différentiable de dimension m. On s'intéresse à l'ensemble de tous les vecteurs tangents en tous les points de la variété M

4.3.1 Définition

Definition 4.8. *L'ensemble $TM = \{(x, X_x), x \in M, X_x \in T_xM\}$ est appelé le fibré tangent de la variété M.*

Le fibré tangent est l'union des espaces tangents

$$TM = \bigcup_{x \in M} \Big(\{x\} \times T_xM\Big) \quad \text{ou simplement} \quad TM = \bigcup_{x \in M} T_xM.$$

Il faut bien préciser que cette union est disjointe: on ne peut pas additionner des éléments X_x et $Y_{x'}$ appartenant à des espaces tangents différents.

Definition 4.9. *L'espace M est appelé la base du fibré tangent.*

Definition 4.10. *On appelle projection canonique sur TM l'application surjective*

$$\pi : TM \to M : (x, X_x) \mapsto x$$

c'est-à-dire:

$$\forall (x, X_x) \in TM, \pi(x, X_x) = x.$$

Remark 4.5. *L'application projection du fibré tangent est de rang m.*

Definition 4.11. *La fibre au-dessus de x est la pré-image*

$$\pi^{-1}(x) = \Big(\{x\} \times T_xM\Big)$$

d'un point x.

Proposition 4.6. *Le fibré tangent a un structure naturelle de variété différentiable de dimension $2n$.*

Proof. Soit (U, φ) une carte de M et $\pi^{-1}(U)$ l'ensemble des fibres au-dessus d'un point de U, c'est-à-dire $\pi^{-1}(U) = \Big\{\big(\{x\} \times T_xM\big), x \in M\Big\}$. L'application

$$\begin{aligned} \Phi : \pi^{-1}(U) \subset TM &\to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n} \\ (x, X_x) &\mapsto (\varphi(x), d\varphi_x(X_x)) \end{aligned}$$

est une bijection. Nous allons montrer que les couples $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ forment un atlas de TM et définissent donc une structure différentiable. La preuve se fait en deux étapes.

1. Il faut d'abord munir TM d'une topologie: on la définit en posant que les applications Φ (pour toutes les cartes de M) sont des homéomorphismes (c'est-à-dire que les ouverts de TM sont les parties $W \subset TM$ telles que $\Phi(W \cap \pi^{-1}(U))$ est ouvert dans $\mathbb{R}^{2n}$). Pour que cela soit possible, il suffit de montrer que, si Φ et Ψ sont les applications correspondant à des cartes (U, φ) et (V, ψ), alors

$$\Psi \circ \Phi^{-1} : \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \to \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$$

est un homéomorphisme. Or, sur son ensemble de définition

$$\Psi \circ \Phi^{-1} = (\psi \circ \varphi^{-1}, D(\psi \circ \varphi^{-1}))$$

et est donc un difféomorphisme (pour la structure différentiable de $\mathbb{R}^{2n}$). C'est donc a fortiori un homéomorphisme.

2. L'expression ci-dessus montre de plus que les couples $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ sont des cartes compatibles entre elles. Comme elles recouvrent TM elles forment donc un atlas et définissent une structure différentiable.

□

La projection canonique $\pi : TM \to M$ apparaît maintenant comme une application différentiable. C'est de plus une submersion surjective.

Remarquons également que l'on peut définir un difféomorphisme $h : \pi^{-1}(U) \subset TM \to U \times \mathbb{R}^n$ en posant $h(x, X_x) = (x, d\varphi_x(X_x))$, qui est de plus linéaire sur les fibres. Ainsi le fibré tangent est difféomorphe localement à un produit: $\pi^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{R}^n$ (h est ce qu'on appelle une trivialisation locale).

En revanche, en général TM n'est pas globalement trivial, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de difféomorphisme de TM dans $M \times \mathbb{R}^n$ linéaire le long des fibres.

Example 4.7. *Exemples.*

- *Le fibré tangent à $\mathbb{R}^n$ admet une trivialisation globale $T\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ via l'identification canonique $T_p\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$.*

- *Le fibré tangent au cercle S^1 admet une trivialisation globale car il est difféomorphe au cylindre: $TS^1 \simeq S^1 \times \mathbb{R}$. En revanche le fibré tangent TS^2 n'admet pas de trivialisation globale.*

- *Est-ce que $O(n)$ (ou $SO(n)$) admet une trivialisation globale ?*

Definition 4.12. *Une section de classe $\mathcal{C}^q$ du fibré tangent TM est une application s de classe $\mathcal{C}^q$ de M sur le fibré tangent TM telle que la composition de l'application s avec la projection canoniqe est l'identité de M.*

$$\pi \circ s = \mathrm{Id}_M.$$

On note $s \in \Gamma(TM)$, où $\Gamma(TM)$ est l'ensemble des sections de classe $\mathcal{C}^q$ de TM.

4.3.2 Extension et diagramme commutatif

Remarquons que l'application Φ permet de définir des coordonnées locales sur TM en utilisant les coordonnées de l'espace tangent. En effet, si (U, φ) est une carte de M avec $\varphi = (x^1, \ldots, x^m)$, le difféomorphisme Φ sur $\pi^{-1}(U)$ s'écrit

$$\Phi(x, X_x) = (x^1, \ldots, x^m, X^1, \ldots, X^m) \in \mathbb{R}^{2m},$$

avec $(x^1, \ldots, x^m) = \varphi(x)$ et $X^i = X_x \cdot x^i$. Ce sont bien des coordonnées locales sur TM.

En s'appuyant sur la construction de Φ, on peut prolonger une application entre deux variétés en un application entre leurs fibrés tangents.

Soient M et N deux variétés différentiables de dimensions respectives m et n. Soit $f : x \mapsto f(x)$ une application différentiable de M sur N. Soient X_x un vecteur tangent de T_xM et $Z_{f(x)}$ l'image de X_x par f, c'est-à-dire df_xX_x.

Definition 4.13. *Soit $f : M \to N$ une application différentiable. On appelle tangente (ou différentielle) de f l'application linéaire notée Tf ou df qui a tout élément (x, X_x) de TM associe l'élément $(f(x), Z_{f(x)})$ de TN telle que:*

- *le diagramme suivant soit commutatif, c'est-à-dire: $f \circ \pi_M = \pi_N \circ df$;*
- *la restriction de df à chaque espace tangent, en un point, est la différentielle en ce point, c'est-à-dire $df|_{T_xM} = df_x$.*

Remark 4.6. *Soient (x^i) et f^j deux systèmes de coordonnées locales définis sur des cartes contenant x et z respectivement. Nous dirons que l'application df associe à chaque couple (x, X_x) le couple (z, Z_x) tel que le vecteur tangent image est*

$$Z_z = \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(x) X^i \frac{\partial}{\partial z^j} \quad i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n.$$

Proposition 4.7. *Si $f_1 : M \to M'$ et $f_2 : M' \to M''$ sont des applications différentialbes entre variétés différentiables, alors $f_2 \circ f_1$ est différentiable et*

$$d(f_2 \circ df_1) = df_2 \circ df_1.$$

Proof. Soient $(U, \varphi), (U', \varphi'), (U'', \varphi'')$ des cartes locales sur M, M' et M'' telle que

$$f_1(U) \subset U' \quad \text{et} \quad f_2(U') \subset U''.$$

La représentation locale de $f_2 \circ f_1$ est:

$$\begin{aligned}
(f_2 \circ f_1)_{\varphi\varphi''} &= \varphi'' \circ f_2 \circ f_1 \circ \varphi^{-1} \\
&= \varphi'' \circ f_2 \circ \varphi'^{-1} \circ \varphi' \circ f_1 \circ \varphi^{-1} \\
&= (f_2)_{\varphi'\varphi''} \circ (f_1)_{\varphi\varphi'}.
\end{aligned}$$

Par le théorème de différentiabilité d'applications composées, l'expression précédente est différentiable. Par définition, on a:

$$d(f_2 \circ f_1)\big(x, [c]_x\big) = \Big((f_2 \circ f_1)(x), [f_2 \circ f_1 \circ c]_{(f_2 \circ f_1)(x)}\Big)$$

et

$$\begin{aligned} d(f_2 \circ f_1)\big(x, [c]_x\big) &= df_2\Big(f_1(x), [f_1 \circ c]_{f_1(x)}\Big) \\ &= \Big((f_2 \circ f_1)(x), [f_2 \circ f_1 \circ c]_{(f_2 \circ f_1)(x)}\Big). \end{aligned}$$

Ainsi

$$d(f_2 \circ f_1) = df_2 \circ df_1.$$

□

Proposition 4.8. *Si* $\mathrm{Id}_M : M \to M$ *est l'application identité sur la variété différentiable* M*, alors* $d\mathrm{Id}_M : TM \to TM$ *est l'application identité sur le fibré tangent.*

Proof. C'est une conséquence évidente de la définition de la différentielle. □

Proposition 4.9. *Si* $f : M \to N$ *est un difféomorphisme entre variété différentialbe alors* $df : TM \to TN$ *est une bijection et*

$$(df)^{-1} = df^{-1}.$$

Proof. Puisque f est un difféomorphisme alors les compostions:

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_M \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_N$$

entraînent

$$d(f^{-1}) \circ df = d(f^{-1} \circ f) d\mathrm{Id}_M$$

d'une part. D'autre part, on a:

$$df \circ d(f^{-1}) = d(f \circ f^{-1}) d\mathrm{Id}_N.$$

De manière générale, rappelons que:

$$\phi : A \to B$$

est une bijection si et seulement si, il existe

$$\psi : B \to A$$

telle que

$$\phi \circ \psi = \mathrm{Id}_B \quad \text{et} \quad \psi \circ \phi = \mathrm{Id}_A.$$

Alors on peut dire que df est une bijection entre TM et TN. L'application df est évidemment l'inverse de df^{-1}. □