

Variétés

Abdoul Salam DIALLO ¹
Université Alioune DIOP de Bambey
UFR SATIC, Département de Mathématiques
B.P. 30, Bambey, Sénégal

Introduction

La géométrie différentielle est un domaine très vaste des mathématiques et dont le point de départ est l'étude des variétés différentiables, qui forment une classe d'espaces géométriques réguliers.

Les (sous) variétés dans $\mathbb{R}^n$, telles que la sphère

$$S^{n-1} = \left\{ (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n (x^i)^2 = 1 \right\}$$

sont introduites dans les cours de calcul différentiel et intégral. Cependant, leur définition nécessite l'existence de l'espace ambiant $\mathbb{R}^n$.

L'un des objectifs de ce cours est de définir et d'étudier des variétés plus abstraites, qui ne sont pas forcément contenues dans un espace plus grand. L'intérêt de cette approche est qu'elle permet une étude intrinsèque des variétés, sans devoir s'encombrer des données superflues concernant l'espace ambiant. Cette approche plus abstraite est également plus ardue, car elle nécessite l'utilisation de définitions plus indirectes que dans $\mathbb{R}^n$.

De manière plus générale, on ne peut espérer obtenir que des coordonnées valables localement sur une variété différentiable. Il faudra disposer de plusieurs jeux de coordonnées locales afin de pouvoir décrire une variété différentiable globalement. Dès lors, les interactions entre les propriétés locales et globales constituent un thème récurrent en géométrie différentielle.

L'utilisation de coordonnées locales sur une variété permettra de généraliser le calcul différentiel et intégral de $\mathbb{R}^n$ à ces espaces plus généraux. Ce premier cours de géométrie différentielle se focalisera sur les fondements du calcul différentiel pour les variétés différentiables.

Une fois que les propriétés de base des variétés différentiables sont établies, la géométrie différentielle permet de se tourner dans d'innombrables directions, telles que les groupes de Lie, la géométrie riemannienne, symplectique, de contact, la mécanique classique avec ses interactions avec la mécanique quantique.

¹E-mail: abdoulsalam.diallo@uadb.edu.sn

Coordonnées sur la sphère S^2

Pour décrire la sphère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ de manière intrinsèque, on délaissera les coordonnées x^1, x^2, x^3 de l'espace ambiant au profit des coordonnées sur la sphère S^2 , telles que les coordonnées sphériques (λ, θ) , où λ est la latitude et θ la longitude. On a:

$$S^2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = \cos \lambda \cos \theta, y = \cos \lambda \sin \theta, z = \sin \lambda \right\}.$$

avec $-\frac{\pi}{2} \leq \lambda \leq \frac{\pi}{2}$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Posons

$$D = \left\{ (\lambda, \theta) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} \leq \lambda \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}.$$

L'application $h : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$h(\lambda, \theta) = (x(\lambda, \theta), y(\lambda, \theta), z(\lambda, \theta))$$

n'est pas injective car:

- $\forall \theta \in [0, 2\pi[, h(-\frac{\pi}{2}, \theta) = (0, 0, -1)$ pôle sud
- $\forall \theta \in [0, 2\pi[, h(\frac{\pi}{2}, \theta) = (0, 0, 1)$ pôle nord

Donc la latitude λ et la longitude θ ne sont pas de bonnes coordonnées globales sur la sphère S^2 , c'est-à-dire: ces coordonnées ne sont pas bien définies sur toute la sphère S^2 notamment à cause de l'indétermination de la longitude θ aux pôles nord et sud de S^2 .

Proposition 0.1. *La différentielle de l'application différentiable h n'est pas de rang maximal égal à 2 partout.*

Proof. La matrice jacobienne suivante:

$$\begin{pmatrix} \partial_\lambda x & \partial_\theta x \\ \partial_\lambda y & \partial_\theta y \\ \partial_\lambda z & \partial_\theta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \lambda \cos \theta & -\cos \lambda \sin \theta \\ -\sin \lambda \sin \theta & \cos \lambda \cos \theta \\ \cos \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang 2 sur D à l'exception des points $(-\frac{\pi}{2}, \theta)$ et $(\frac{\pi}{2}, \theta)$ où elle est de rang 1. $\square$

En tout autre point, il existe une matrice 2×2 inversible et les déterminants sont respectivement:

- $-\sin \lambda \cos \lambda$ qui est égal à zéro si $\lambda = 0$;
- $-\cos^2 \lambda \cos \theta$ qui est égal à zéro si $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$;
- $\cos^2 \lambda \sin \theta$ qui est égal à zéro si $\theta = 0$.

Projection stéréographique

Nous allons essayer de régler le problème des pôles due à la paramétrisation globale de la sphère S^2 . Pour couvrir toute la sphère S^2 , nous allons introduire deux systèmes de coordonnées. Posons:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{p \in S^2, z(p) > -1/2\}; \\ U_2 &= \{p \in S^2, z(p) < -1/2\}; \\ \mathbb{R}^2 &= \{q \in \mathbb{R}^2, z(q) = 0\}. \end{aligned}$$

La projection stéréographique à partir du pôle sud sur le plan méridien est:

$$\phi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^2 : p \mapsto \phi_1(p) = (\xi_1, \eta_1) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right).$$

Notons que $\frac{\xi_1}{x} = \frac{1}{1+z} = \frac{\eta_1}{y}$.

La projection stéréographique à partir du pôle nord sur le plan méridien est:

$$\phi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : p \mapsto \phi_2(p) = (\xi_2, \eta_2) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right).$$

Notons que $\frac{\xi_2}{x} = \frac{1}{1-z} = \frac{\eta_2}{y}$.

Chacune des systèmes de paramétrisations définis est valide pour plus que la moitié de la sphère où U_1 est sans le pôle sud and U_2 sans le pôle nord.

Les systèmes de paramétrisations couvrent la sphère, i.e.,

$$U_1 \cup U_2 = S^2.$$

Proposition 0.2. *L'application composée:*

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (\xi_1, \eta_1) \mapsto (\xi_2, \eta_2)$$

est une bijection différentiable et sa différentielle est de rang maximal en tout point.

Proof. À partir de $x = (1+z)\xi_1$ et $y = (1+z)\eta_1$, on a:

$$1 - z^2 = x^2 + y^2 = (1+z)^2(\xi_1^2 + \eta_1^2)$$

Ceci implique

$$1 - z = (1+z)(\xi_1^2 + \eta_1^2).$$

Ainsi, on obtient que:

$$\xi_2 = \frac{\xi_1}{\xi_1^2 + \eta_1^2} \quad \text{et} \quad \eta_2 = \frac{\eta_1}{\xi_1^2 + \eta_1^2}.$$

Les changements de coordonnées $(\xi_1, \eta_1) \mapsto (\xi_2, \eta_2)$ sur $U_1 \cap U_2 = \{p \in S^2, -1/2 < z(p) < 1/2\}$ est défini par

$$(\xi_1, \eta_1) \mapsto \phi_2 \circ \phi_1^{-1}(\xi_1, \eta_1) = \left(\frac{\xi_1}{\xi_1^2 + \eta_1^2}, \frac{\eta_1}{\xi_1^2 + \eta_1^2} \right).$$

Cette application $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ est une bijection différentiable et sa différentielle est de rang maximal en tout point. En effet:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial \eta_1} \\ \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \eta_2}{\partial \eta_1} \end{vmatrix} = \frac{-1}{(\xi_1^2 + \eta_1^2)^2}$$

□

Dans la suite, nous allons munir un espace topologique M d'une structure de variété à partir du concept que les coordonnées locales sont attachés à tout élément de M et que si un point de M est sur deux systèmes de coordonnées différents alors le changement de coordonnées doit être simple. Nous allons introduire rigoureusement la notion de variété qui généralise celle de surface.

1 Variétés topologiques

Soit M un ensemble d'éléments appelés points et F un espace vectoriel réel normé de dimension finie.

1.1 Cartes et coordonnées locales

On munit M d'une topologie en considérant que tout point de M est au moins dans un ouvert U_i de M (recouvrement).

1.1.1 Carte

Definition 1.1. Une carte locale de dimension n en un point p de M est un couple (U, φ) , où

- U est un voisinage ouvert de p dans M ,
- φ est un homéomorphisme de U sur $\varphi(U)$, ouvert de F .

L'ouvert U est appelé le domaine de la carte locale (U, φ) et $\varphi(U)$ son codomaine.

Remark 1.1. Si (U, φ) est une carte locale en p , alors (U, φ) est une carte locale en tout point de U .

Remark 1.2. À partir de la carte locale (U, φ) en p , nous pouvons construire une infinité de cartes locales en p .

Remark 1.3. Un point arbitraire p de M peut être dans deux ouverts distincts U_j et U_k . Les cartes distinctes correspondantes sont (U_j, ϕ_j) et (U_k, ϕ_k) .

Dans la suite de ce cours, l'espace vectoriel normé F sera $\mathbb{R}^n$, ainsi donc à chaque point p de M est associé une carte (U, φ) telle que $\phi(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Les homéomorphismes φ_j et φ_k étant différent, nous relient les ouverts ouverts $\varphi_j(U_j)$ et $\varphi_k(U_k)$ de $\mathbb{R}^n$ en introduisant la définition suivante: soit (U_j, ϕ_j) et (U_k, ϕ_k) deux cartes locales de dimension n en p . L'application

$$\varphi_k \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_j \cap U_k) \rightarrow \varphi_k(U_j \cap U_k)$$

est un homéomorphisme d'inverse $\varphi_j \circ \varphi_k^{-1}$.

Remark 1.4. Pour se donner une carte locale (U, φ) de M il suffit de se donner un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et un homéomorphisme ψ de Ω sur un ouvert de M : on pose alors $U = \psi(\Omega)$ et $\varphi = \psi^{-1}$. Le couple (Ω, ψ) est alors appelé une paramétrisation locale de M .

Definition 1.2. Une carte locale (U, φ) est dite centrée en p si de plus $p \in U$ et $\varphi(p) = 0$.

1.1.2 Coordonnées locales

Soit $p_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x^1, \dots, x^n) \mapsto x^i$ la projection de $\mathbb{R}^n$ sur son i -ème facteur. On pose:

$$x^i = p_i \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}.$$

Definition 1.3. Les fonctions $x^1, \dots, x^n$ sont appelées fonctions coordonnées (relativement à la carte locale (U, φ)) et $(x^1, \dots, x^n)$ est appelé le système de coordonnées locales. L'ouvert U est alors appelé voisinage coordonnée de p et $x^1(p), \dots, x^n(p)$ sont appelées coordonnées de p (relativement à la carte (U, φ)).

Definition 1.4. Les coordonnées locales x^i d'un point p du domaine d'une carte (U, φ) de M sont les coordonnées du point $\varphi(p)$ de $\mathbb{R}^n$.

Remark 1.5. La bijection φ assigne à tout point p de $U \subset M$ le système $(x^1, \dots, x^n)$. Réciproquement φ^{-1} assigne à chaque n -uplets de nombre réels un point de U .

Remark 1.6. Dans une carte (U, φ) et pour chaque point donné p de U , il y a unicité de coordonnées: ces coordonnées sont appelées à jouer un rôle analogue aux coordonnées habituelles dans les espaces vectoriels de dimension finie.

Remark 1.7. Une carte locale (U, φ) dépend à la fois du sous-ensemble ouvert U et de l'homéomorphisme φ . En changeant l'un ou l'autre, on change de système de coordonnées. Ainsi, si V est un ouvert contenu dans U et $\psi = \varphi|_V$, alors (V, ψ) est une nouvelle carte locale bien que les coordonnées d'un point $p_1 \in V$ restent les mêmes relativement aux deux cartes locales. Compte tenu de l'équivalence des normes sur $\mathbb{R}^n$ et en composant au besoin avec une transformation $\tau : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, on pourra toujours choisir V de telle sorte que $\psi(V)$ soit une boule ouverte $B_r(0)$ de $\mathbb{R}^n$ de rayon r , centrée à l'origine 0 ou un n -cube $C_r(0)$ de côté r , centré en 0 . On obtient ainsi un nouveau système de coordonnées correspondant à la nouvelle carte locale $(V, \tau \circ \psi)$.

1.1.3 Fonctions de transition

Considérons deux cartes locale (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) de M telles que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Notons encore $\varphi_i : i = 1, 2$, la restriction de φ_i sur $U_1 \cap U_2$, et $\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$. Alors

$$\varphi_{ij} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

est un homéomorphisme et on a:

$$\varphi_{ij}^{-1} = \varphi_{ji} \quad \text{et} \quad \varphi_i = \varphi_{ij} \circ \varphi_j \quad \text{sur} \quad U_1 \cap U_2.$$

Cette dernière égalité signifie encore que si $(x_i^1, \dots, x_i^n)$ et $(x_j^1, \dots, x_j^n)$ sont les systèmes de coordonnées locales sur (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) respectivement, alors

$$(x_i^1, \dots, x_i^n) = \varphi_{ij} \circ (x_j^1, \dots, x_j^n).$$

Les applications φ_{12} et φ_{21} sont appelés fonctions de transition ou encore applications de changement de cartes.

1.1.4 Atlas continu

Definition 1.5. Soient M un espace topologique et $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ une famille de cartes locales de M . On dit que $\mathcal{A}$ est un atlas de M si $M = \bigcup_{i \in I} U_i$

Definition 1.6. Un atlas continu (de dimension n) sur un ensemble M est une collection $\mathcal{A}$ de bijections:

$$\varphi_i : U_i \rightarrow \varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$$

entre des ouverts U_i de M recouvrant M et des ouverts de $\mathbb{R}^n$, telle que pour tous $\varphi_i, \varphi_j \in \mathcal{A}$, les bijections

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

soient des homéomorphismes entre ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Si toutes les cartes locales de $\mathcal{A}$ ont la même dimension n , on dit que $\mathcal{A}$ est un atlas de dimension n .

1.1.5 Variétés topologiques

Definition 1.7. Une structure de variété topologique sur M , est la donnée d'un atlas de M . La dimension de la variété topologique n est par définition la dimension d'un atlas de M , c'est-à-dire la dimension commune des cartes de cet atlas.

Proposition 1.1. Étant donné un atlas continu $\mathcal{A}$ (de dimension n) sur un ensemble M , il existe une et une seule topologie sur M telle que les bijections $\varphi_i \in \mathcal{A}$ soient des homéomorphismes entre ouverts de M et ouverts de $\mathbb{R}^n$. Autrement dit, la donnée d'un atlas continu sur un ensemble M définit sur cet ensemble une structure de variété topologique.

Definition 1.8. Une variété topologique de dimension n est un espace topologique séparé M qui vérifie la propriété suivante: tout point de M possède un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Autrement dit, un espace topologique séparé M est une variété topologique de dimension n si pour tout $p \in M$, il existe un voisinage ouvert U de p , il existe un ouvert V de $\mathbb{R}^n$, et il existe $\varphi : U \rightarrow V$ un homéomorphisme de U sur V . Le couple (U, φ) est appelé carte locale de M au point p . Pour tout $q \in U$, les coordonnées de $\varphi(q)$ dans $\mathbb{R}^n$ sont les coordonnées de q dans la carte (U, φ) . Une carte locale est aussi appelée un système local de coordonnées.

Une des conséquences immédiates de la définition est que tout point d'une variété topologique possède un système fondamental dénombrable de voisinages compacts et connexes. En particulier, une variété topologique est localement compacte. Une étude topologique un peu plus poussée permet par ailleurs de constater que les trois points suivants sont vérifiés:

1. Une variété topologique connexe est connexe par arcs.
2. Une variété topologique connexe et paracompacte est dénombrable à l'infini.
3. Une variété topologique est métrisable si et seulement si elle est paracompacte.

Pour (1), on pourra considérer p un point de M , $\mathcal{C}_p$ l'ensemble des points de M qui peuvent être joints à p par un chemin continu, et montrer que $\mathcal{C}_p$ est un sous ensemble non vide de M qui est à la fois ouvert et fermé dans M . Pour ce qui est de (2), on associe à tout point p de M un voisinage ouvert relativement compact U_p de p . La variété M étant supposée paracompacte il existe un recouvrement ouvert localement fini $(\omega_i)_{i \in I}$ de M qui est plus fin que le recouvrement $(U_p)_{p \in M}$. (C'est la définition de la paracompacité...). Si ω_1 désigne un des ω_i on pose alors $K_1 = \overline{\omega_1}$, et on construit par récurrence

$$K_m = \bigcup_{i \in I_m} \overline{\omega_i}$$

où $I_m = \{i \in I, \omega_i \cap K_{m-1} \neq \emptyset\}$, $m \geq 2$. En remarquant que pour tout compact K de M seul un nombre fini des ω_i rencontre K (c'est une conséquence facile du caractère localement fini du recouvrement $(\omega_i)_{i \in I}$), on voit que pour tout $m \geq 1$, K_m est compact. Reste à vérifier que $\bigcup_{m \geq 1} K_m$ est un sous ensemble non vide de M qui est à la fois ouvert et fermé dans M . (Notons que pour tout $m \geq 2$, $K_{m-1} \subset \overset{\circ}{K}_m$). Enfin, (3) est une conséquence facile du théorème de Stone (un espace métrique est paracompact) et du théorème d'Urysohn (un espace topologique régulier à base dénombrable est métrisable.)

Remark 1.8. (*Invariance topologique de la dimension*) Un théorème célèbre de topologie assure qu'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ne peut pas être homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^{n'}$ pour $n \neq n'$. (N.B.: rappelons que ce théorème est évident dans le cas des difféomorphismes; mais il est loin de l'être pour les homéomorphismes!). Il en résulte que la notion de dimension d'une variété topologique est définie sans ambiguïté: une variété topologique à n dimensions ne peut être en même temps une variété topologique à n' dimensions, avec $n \neq n'$.

Example 1.1. Soit $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ muni de la topologie induite. Soient $N = (0, 0, 1)$ et $S = (0, 0, -1)$ les deux pôles de la sphère.

1. Soit $A = (x, y, z) \in U_N = S^2 - \{N\}$. La droite D_1 passant par A et N rencontre le plan (xoy) en un point $A' = (x', y')$. L'équation de la droite est: $\overrightarrow{AN} = \lambda \overrightarrow{AA'}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On a:

$$\begin{cases} x - 0 &= \lambda(x - x') & (1) \\ y - 0 &= \lambda(y - y') & (2) \\ z - 1 &= \lambda z & (3) \end{cases}$$

L'équation (3) entraîne: $\lambda = \frac{z-1}{z}$, (3'). En injectant (3') dans (1) et (2), on obtient: $x' = \frac{x(\lambda-1)}{\lambda}$ et $y' = \frac{y(\lambda-1)}{\lambda}$. De (3'), on a: $\lambda - 1 = \frac{-1}{z}$ et $\frac{\lambda-1}{\lambda} = \frac{1}{1-z}$. Ainsi: $x' = \frac{x}{1-z}$ et $y' = \frac{y}{1-z}$. On vérifie facilement que l'application

$$\begin{aligned} \varphi_N : S^2 - \{N\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ A(x, y, z) &\mapsto A'(x', y') = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right) \end{aligned}$$

est continue et bijective, et que:

$$\varphi_N^{-1}(x', y') = \left(\frac{2x'}{1+x'^2+y'^2}, \frac{2y'}{1+x'^2+y'^2}, \frac{-1+x'^2+y'^2}{1+x'^2+y'^2} \right)$$

est continue. Le couple (U_N, φ_N) est une carte de S^2 .

2. De façon analogue, on construit une deuxième carte sur S^2 . Soit $B = (x, y, z) \in U_S = S^2 - \{S\}$. La droite D_2 passant par B et S rencontre le plan (xoy) en un point $B' = (x', y')$. L'équation de cette droite est: $\overrightarrow{BS} = \beta \overrightarrow{BB'}$ avec $\beta \in \mathbb{R}$. On a:

$$\begin{cases} x - 0 &= \beta(x - x') & (4) \\ y - 0 &= \beta(y - y') & (5) \\ z + 1 &= \beta z & (6) \end{cases}$$

L'équation (6) entraîne: $\beta = \frac{z+1}{z}$, (6'). En injectant (6') dans (4) et (5), on obtient: $x' = \frac{x(\beta-1)}{\beta}$ et $y' = \frac{y(\beta-1)}{\beta}$. De (6'), on a: $\beta - 1 = \frac{1}{z}$ et $\frac{\beta-1}{\beta} = \frac{1}{1+z}$. Ainsi: $x' = \frac{x}{1+z}$ et $y' = \frac{y}{1+z}$. On montre que l'application:

$$\begin{aligned} \varphi_S : S^2 - \{S\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ B(x, y, z) &\mapsto B'(x', y') = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right) \end{aligned}$$

est continue et bijective. Le couple (U_S, φ_S) est aussi une carte de S^2 .

On a: $U_N \cap U_S = S^2 - \{N; S\}$ et $\varphi_N(U_N \cap U_S) = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} = \varphi_S(U_N \cap U_S)$. D'où la fonction de transition est:

$$\begin{aligned} \varphi_S \circ \varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \\ (x_1, x_2) &\mapsto (y_1, y_2) \end{aligned}$$

où $y_1 = \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}$ et $y_2 = \frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}$. L'application $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}$ est un homéomorphisme.

La construction des applications φ_N et φ_S est appelée projection stéréographique.

2 Structures différentielles sur une variété

La notion de variété topologique nous a permis d'introduire les coordonnées locales et la continuité. Mais cette notion est insuffisante pour définir la notion de différentiabilité.

Renforçons la définition d'un atlas continu en exigeant que les changements de cartes $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ soient non seulement des homéomorphismes mais des difféomorphismes (entre ouverts de $\mathbb{R}^n$).

2.1 Atlas de classe $\mathcal{C}^q, q \geq 1$

Definition 2.1. Deux cartes (U_j, φ_j) et (U_k, φ_k) sur M telle que $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ sont dites $\mathcal{C}^q$ -compatible ($q \geq 1$) si l'application de changement de cartes

$$\varphi_{kj} := \varphi_k \circ \varphi_j^{-1}|_{\varphi_j(U_j \cap U_k)}$$

est un $\mathcal{C}^q$ -difféomorphisme entre les ouverts $\varphi_j(U_j \cap U_k)$ et $\varphi_k(U_j \cap U_k)$ de $\mathbb{R}^n$.

Remark 2.1. Remarquons qu'il n'est pas possible de demander que les applications φ_j soient différentiables, car cela n'a pas de sens sur un domaine M plus général que $\mathbb{R}^n$. Par contre, cela ne pose aucune difficulté pour l'application de changement de cartes $\varphi_k \circ \varphi_j^{-1}$. Lorsque cette application est un difféomorphisme, on dit que les cartes locales (U_j, φ_j) et (U_k, φ_k) sont compatibles.

Definition 2.2. Un atlas de classe $\mathcal{C}^q$ sur M est une famille $\mathcal{A}$ de cartes locales $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ telle que:

1. les domaines U_i des cartes recouvrent M , c'est-à-dire:

$$\bigcup_{i \in I} U_i = M;$$

2. pour toute deux cartes $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$ de $\mathcal{A}$ avec $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ sont $\mathcal{C}^q$ -compatible.

Remark 2.2. Un atlas de classe $\mathcal{C}^q$ engendre un atlas de classe $\mathcal{C}^p$ tel que $p \leq q$.

Definition 2.3. Soient $1 \leq q \leq \infty$ un entier non négatif et M une variété topologique. On dit qu'un atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ de M est de classe $\mathcal{C}^q, 1 \leq q \leq \infty$, si pour tous i et j dans I tels que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, les fonctions de transition

$$\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

sont des difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^q$.

Definition 2.4. Soient M une variété topologique et $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ un atlas de M . On dit que $\mathcal{A}$ est de classe $\mathcal{C}^q, 1 \leq q \leq \infty$, si pour tous i et j dans I , les applications de changement de cartes φ_{ij} sont des difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^q$ de $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ sur $\varphi_i(U_i \cap U_j)$.

Comme pour tous i et j dans I , $\varphi_{ji} = \varphi_{ij}^{-1}$ il suffit dans la pratique de vérifier que les applications de changement de cartes sont de classe $\mathcal{C}^q$.

Exemple 2.1. (*Atlas de la sphère*) Soit la sphère S^2 définie par:

$$S^2 = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 : \sum_{i=1}^3 (x^i)^2 = 1\}.$$

Considérons l'application φ_1 , la projection stéréographique à partir du pôle nord N sur le plan $\{q \in \mathbb{R}^3 : x^3(q) = 0\}$. Elle est une bijection entre $S^2 - \{N\}$ et ce plan.

Similairement, la projection stéréographique à partir du pôle sud S sur le plan $\{q \in \mathbb{R}^3 : x^3(q) = 0\}$ une bijection entre $S^2 - \{N\}$ et ce plan.

À cause des pôles la sphère ne peut recouverte par une seule carte: un simple homéomorphisme ϕ ne peut être utilisé entre S^2 et le plan.

Sur la sphère S^2 avec la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^3$, en se referant à l'introduction, nous avons que les deux cartes arbitraires (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) sont compatibles. L'atlas de la sphère S^2 est composé au moins de deux cartes.

Definition 2.5. Une carte (U, φ) est compatible ou est admissible avec l'atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ si l'union $\{(U, \varphi)\} \cup \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ est encore un atlas; c'est-à-dire si elle est une carte de l'atlas.

Definition 2.6. Soit $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ un atlas de M . Une carte locale (U, φ) de M est dite $\mathcal{C}^q$ -compatible (ou admissible) avec $\mathcal{A}$, si pour toute carte locale (U_i, φ_i) de $\mathcal{A}$ telle que $U \cap U_i \neq \emptyset$, la fonction de transition

$$\varphi \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U \cap U_i) \rightarrow \varphi(U \cap U_i)$$

est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^q$.

Definition 2.7. Soient M une variété topologique et $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ deux atlas de classe $\mathcal{C}^q$ sur M . On dit que $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont $\mathcal{C}^q$ -compatibles (ou équivalent) si $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ est encore un atlas de classe $\mathcal{C}^q$ sur M .

On vérifie facilement que la relation de $\mathcal{C}^q$ -compatibilité est une relation d'équivalence sur l'ensemble des atlas de classe $\mathcal{C}^q$ de M . La réunion des atlas d'une même classe d'équivalence est appelée un $\mathcal{C}^q$ -atlas saturé (ou complet). Tout atlas de classe $\mathcal{C}^q$ sur M est alors contenu dans un unique $\mathcal{C}^q$ -atlas saturé (remarque simple mais néanmoins importante).

Deux atlas différentiables de dimension n sur M peuvent donner lieu à une description équivalente de M en coordonnées locales si les cartes locales de l'un sont compatibles avec les cartes locales de l'autre (c'est-à-dire si l'union de ces atlas est encore un atlas différentiable). De plus, lorsqu'il existe un atlas différentiable de dimension n sur M , il en existe beaucoup d'autres qui lui sont équivalents: il suffit de rajouter des cartes locales compatibles ou de modifier des applications de coordonnées par des difféomorphismes dans $\mathbb{R}^n$. Il est donc important de distinguer un atlas en particulier dans une telle classe d'équivalence d'atlas.

Definition 2.8. Un atlas différentiable $\mathcal{A}$ pour M est dit maximal si il n'est pas inclus strictement dans un autre atlas différentiable pour M .

Remark 2.3. L'atlas maximal $\tilde{\mathcal{A}}$ associé avec un atlas $\mathcal{A}$ est l'atlas composé de toute les cartes compatibles avec $\mathcal{A}$.

Clairement, un atlas maximal est unique dans une classe d'équivalence d'atlas. Il reste à vérifier qu'un tel atlas existe toujours.

Proposition 2.1. *Soit $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ un atlas de classe $\mathcal{C}^q$ de M et soit $\tilde{\mathcal{A}}$ l'ensemble des cartes locales de M qui sont $\mathcal{C}^q$ -compatible avec $\mathcal{A}$. Alors:*

1. $\tilde{\mathcal{A}}$ est un atlas de M de classe $\mathcal{C}^q$ contenant $\mathcal{A}$.
2. $\tilde{\mathcal{A}}$ est l'unique atlas maximal de classe $\mathcal{C}^q$ contenant $\mathcal{A}$.

Proof. Il est évident que $\mathcal{A}$ est contenu dans $\tilde{\mathcal{A}}$. Soient maintenant (U, φ) et (V, ψ) deux éléments de $\tilde{\mathcal{A}}$ tels que $U \cap V \neq \emptyset$. Il s'agit de montrer que

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^q$. Soit $a \in U \cap V$. Il existe une carte (U_i, φ_i) de $\mathcal{A}$ telle que $a \in U_i$. Alors sur $U \cap V \cap U_i$ on a: $\psi \circ \varphi^{-1} = (\psi \circ \varphi_i^{-1}) \circ (\varphi_i \circ \varphi^{-1})$ et $\varphi \circ \psi^{-1} = (\varphi \circ \varphi_i^{-1}) \circ (\varphi_i \circ \psi^{-1})$. Ce qui montre que $\psi \circ \varphi^{-1}$ et $\varphi \circ \psi^{-1}$ sont de classe $\mathcal{C}^q$. Soient maintenant $\bar{\mathcal{A}}$ un autre atlas de classe $\mathcal{C}^q$ contenant $\mathcal{A}$, et (U, α) une carte de $\bar{\mathcal{A}}$. Si (U_i, φ_i) est une carte de $\mathcal{A}$ telle que $U_i \cap U \neq \emptyset$, alors $\alpha \circ \varphi_i^{-1}$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^q$, et donc $(U, \alpha) \in \tilde{\mathcal{A}}$ par définition de $\tilde{\mathcal{A}}$. Donc $\bar{\mathcal{A}} \subset \tilde{\mathcal{A}}$: ceci montre que $\tilde{\mathcal{A}}$ est maximal. $\square$

Cette proposition permet de dire que toute atlas de classe $\mathcal{C}^q$ de M peut être considéré comme partie d'un et d'un seul atlas maximal de classe $\mathcal{C}^q$.

2.2 Structure différentielle sur une variété

Definition 2.9. *On appelle structure différentielle sur une variété topologique M la donnée, à équivalence différentiable près, d'un atlas différentiable de M .*

Remark 2.4. *Un atlas maximal sur M confère à M une structure différentiable.*

En pratique, une structure différentiable sur une variété est définie à partir d'un atlas représentatif de sa classe d'équivalence (tous les atlas équivalents définissant la même structure différentiable sur la variété). La définition d'une structure différentiable sur une variété suppose que:

1. Les ouverts des cartes locales recouvrent M .
2. Toute deux cartes (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) telles que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ sont $\mathcal{C}^q$ -compatibles

Avec un changement de coordonnées locales, nous allons expliciter la seconde hypothèse.

2.3 Changement de cartes

Soit p un point de l'intersection $U_i \cap U_j$ des domaines de deux cartes (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) . Considérons deux systèmes de coordonnées locales. La définition d'un atlas de classe $\mathcal{C}^q$ signifie que les coordonnées $x^1, \dots, x^n$ de p par rapport à un système de coordonnées locale sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^q$ des coordonnées $x^1, \dots, x^n$ de p par rapport à l'autre système de coordonnées locale.

Definition 2.10. Les changements de cartes (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) ou transformation de coordonnées locale du point p est admissible si il existe a C^q -difféomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^n$

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : (x^1, \dots, x^n) \mapsto (x'^1, \dots, x'^n)$$

c'est-à-dire si les fonctions f^j définissant les transformations

$$x'^1 = f^1(x^1, \dots, x^n), \dots, x'^n = f^n(x^1, \dots, x^n)$$

ont des dérivées partielles d'ordre n continues par rapport aux variables x^k .

3 Variétés différentiables

3.1 Définitions

Definition 3.1. On appelle variété différentiable la donnée d'une variété topologique et d'une structure différentiable sur cette variété.

Definition 3.2. Une variété différentiable de classe C^k est un espace topologique munit d'un atlas maximal.

Remark 3.1. La terminologie variété différentielle tend à souligner qu'il ne s'agit pas d'énoncer une propriété de l'objet appelé variété (comme quand on dit d'une fonction qu'elle est différentiable), mais de se donner une structure sur cet objet (comme un espace topologique est un espace muni d'une structure topologique). Par contre dans le cas des sous-variétés la différentiabilité est effectivement une propriété de l'objet (puisque la structure est déjà imposée par l'espace ambiant).

Nous supposons désormais que la base de la topologie définie par les domaines des cartes est dénombrable; donc nous supposons que M est séparable.

L'exemple suivant montre que la topologie d'une variété n'est pas généralement séparée.

Example 3.1. Soit dans $\mathbb{R}^2$ l'ensemble:

$$E = \{(x, 0); x < 0\} \cup \{(x, 0); x \geq 0\} \cup \{(x, 1), x \geq 0\}.$$

On peut munir E d'une structure de variété au moyen des deux cartes suivantes:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}, \varphi_1(x, 0) = x \\ U_2 &= \{(x, 0), x < 0\} \cup \{(y, 1), y \geq 0\}, \varphi_2((x, 0)) = 0, \varphi_2((y, 1)) = 1. \end{aligned}$$

On a bien

$$U_1 \cup U_2 = E.$$

Les applications φ_1 et φ_2 sont des homéomorphismes. En effet,

$$\varphi_1(U_1) = \mathbb{R}, \varphi_2(U_2) = \mathbb{R}, \varphi_2(U_1 \cap U_2) = \varphi_1(U_1 \cap U_2) = \{x, x < 0\}$$

sont des ouverts. Enfin l'application

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2)$$

est l'identité

$$x \mapsto (x, 0) \mapsto x.$$

Cette application de $] - \infty, 0[\rightarrow] - \infty, 0[$ est de classe C^∞ . Donc E est ainsi munie d'une structure de variété de classe C^∞ .

Cependant la topologie associée n'est pas séparée: les points $(0, 1)$ et $(0, 0)$, distincts n'admettent pas de voisinages disjoints. En effet, si U est un ouvert de E contenant $(0, 0)$, on doit avoir $\varphi_1(U \cap U_1)$ ouvert de $\mathbb{R}$, or $(0, 0) \in U \cap U_1$ donc $\varphi_1(U \cap U_1)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0, il contient donc un intervalle de la forme $] - \alpha, \alpha[$ avec $\alpha > 0$, mais alors $\{(x, 0), -\alpha < x < 0\} \subset U$; de même un ouvert V de E contenant $(0, 1)$ contiendra une partie de la forme $\{(x, 0), -\beta < x < 0\}$. Donc U et V ne peuvent pas être disjoints.

Par la suite on écartera de tels exemples.

Définition 3.3. Une variété différentiable est un couple d'espace topologique séparé, de base dénombrable et d'un atlas. Une variété différentiable est une variété de dimension n si pour chaque point de l'espace il existe une carte locale admissible (U, φ) telle que $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

Notation: Si la dimension est n , la variété $(M_n, \mathcal{A})$ sera notée M_n ou simplement M .

Désormais toute variété sera implicitement supposée séparée. Bien sûr séparé veut dire: séparée pour la topologie canonique. Voici d'ailleurs quelques propriétés de la topologie d'une variété.

Theorem 3.1. Une variété M est un espace topologique localement compact.

Proof. Il faut montrer que tout point x de M admet un voisinage compact. Soit $x \in M$ et (U, φ) une carte en x . L'application φ est un homéomorphisme de U sur $\varphi(U)$ qui est un voisinage de $\varphi(x)$ dans $\mathbb{R}^n$ localement compact. Alors il existe un compact K de $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(x) \in K \subset \varphi(U)$. Mais φ^{-1} est continue et M est séparé, alors $\varphi^{-1}(K)$ est un voisinage compact de x . $\square$

Theorem 3.2. Une variété M est localement connexe

Proof. Soit $x \in M$ et (U, φ) une carte en x . On a: $\varphi(U)$ est un voisinage de $\varphi(x)$ dans $\mathbb{R}^n$ contient un voisinage connexe C de $\varphi(x)$. Alors $\varphi^{-1}(C)$ est un voisinage connexe de M contenant x . $\square$

Theorem 3.3. Une variété M est connexe si et seulement si elle est connexe par arcs.

Proof. On sait connexe par arcs entraîne connexe pour un espace topologique. Supposons réciproquement M connexe au sens topologique. Soit $x \in M$ et $Q = \{y \in M, \exists \text{ chemin de } x \text{ à } y\}$. Il faut prouver que $Q = M$, et pour cela on va montrer que Q est non vide, ouvert et fermé. Comme $x \in Q$, on a: $Q \neq \emptyset$.

- Q est ouvert: soit $y \in Q$, (U, φ) une carte en y , $\varphi(U)$ ouvert dans $\mathbb{R}^n$ et donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(\varphi(y), \varepsilon) \subset \varphi(U)$. Soit $z \in B(\varphi(y), \varepsilon)$. Il existe une application $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue telle que $\gamma(0) = \varphi(y)$, $\gamma(1) = z$

et $\gamma([0, 1]) \subset B(\varphi(y), \varepsilon)$ (par exemple l'application $\gamma(t) = \varphi(y) + t(z - \varphi(y))$). L'application

$$\varphi^{-1} \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \varphi^{-1}(B(\varphi(y), \varepsilon))$$

est un chemin joignant y à $\varphi^{-1}(z)$. Comme on peut joindre x à y , on peut finalement joindre x à $\varphi^{-1}(z)$, quel que soit z de $B(\varphi(y), \varepsilon)$. Donc $y \in Q \Rightarrow \varphi^{-1}(B(\varphi(y), \varepsilon)) \subset Q$. Comme φ est un homéomorphisme de U sur $\varphi(U)$, $\varphi^{-1}(B(\varphi(y), \varepsilon))$ est un ouvert, donc Q est voisinage de chacun de ses points.

- Q est fermé. Soit $y \in \overline{Q}$ et (U, φ) une carte en y . Comme $\varphi(y) \in \varphi(U)$ ouvert, il existe ε tel que $B(\varphi(y), \varepsilon) \subset \varphi(U)$, donc $\varphi^{-1}(B(\varphi(y), \varepsilon)) \subset U$. Mais $y \in \overline{Q}$, et $\varphi^{-1}(B(\varphi(y), \varepsilon))$ est un ouvert contenant y , donc il existe $z \in Q \cap \varphi^{-1}(B(\varphi(y), \varepsilon))$. Comme $\varphi(z) \in B(\varphi(y), \varepsilon)$, on peut joindre y et z par un chemin dans M . Mais $z \in Q$, on peut donc joindre x et z , et finalement x et y , ce qui prouve $y \in Q$, i.e $\overline{Q} \subset Q$.

Alors Q est ouvert et fermé non vide M . Donc $Q = M$. □

3.2 Produit de variétés

Soit M^m une variété de classe $\mathcal{C}^q$ définie par l'atlas

$$\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i), i \in I\}.$$

Soit N^n une variété de classe $\mathcal{C}^q$ définie par l'atlas

$$\mathcal{A}' = \{(V_j, \psi_j), j \in J\}.$$

Definition 3.4. L'atlas produit $\mathcal{A} \times \mathcal{A}'$ est

$$\{(U_i \times V_j, \varphi_i \times \psi_j)_{(i,j) \in I \times J}\}$$

où

$$U_i \times V_j = \{(x_i, y_j), x_i \in U_i, y_j \in V_j\}$$

et

$$\varphi_i \times \psi_j : U_i \times V_j \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : (x, y) \mapsto (\varphi_i(x), \psi_j(y)).$$

Remark 3.2. Des atlas compatibles sur M et des atlas compatibles sur N fournissent des atlas produits sur $M \times N$ qui sont compatibles. Ainsi, la structure de variété sur $M \times N$ vient des structures des variétés de M et N . En effet, si nous notons

$$W_{ij} = U_i \times V_j \quad W'_{ij} = U'_i \times V'_j$$

alors l'ensemble suivant

$$W_{ij} \cap W'_{ij} = (U_i \times V_j) \cap (U'_i \times V'_j) = (U_i \cap U'_i) \times (V_j \cap V'_j)$$

est un ouvert de $M \times N$. De même, si nous définissons φ_{ij} telle que

$$\varphi_{ij}(x, y) = (\varphi_i(x), \psi_j(y))$$

et analogiquement $\varphi'_{ij}(x, y) = (\varphi'_i(x), \psi'_j(y))$, alors le C^∞ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^{m+n}$ est:

$$\varphi'_{ij} \circ \varphi_{ij}^{-1} = (\varphi'_i, \psi'_j) \circ (\varphi_i^{-1}, \psi_j^{-1}) = (\varphi'_i \circ \varphi_i^{-1}) \times (\psi'_j \circ \psi_j^{-1}).$$

En effet,

$$\begin{aligned} \varphi'_{ij} \circ \varphi_{ij}^{-1}(x, y) &= \varphi'_{ij}(\varphi_i^{-1}(x), \psi_j^{-1}(y)) \\ &= (\varphi'_i(\varphi_i^{-1}(x)), \psi'_j(\psi_j^{-1}(y))) \\ &= ((\varphi'_i \circ \varphi_i^{-1})(x), (\psi'_j \circ \psi_j^{-1})(y)). \end{aligned}$$

Definition 3.5. La variété produit $M^m \times N^n$ de deux variétés est la variété définie à partir de l'atlas produit de M^m et N^n . Sa dimension est la somme de la dimension de chaque variété.

Remark 3.3. Si M est de classe C^p et N de classe C^q alors $M \times N$ est de classe $C^{\inf(p,q)}$.

3.3 Exemples de variétés

Example 3.2. L'espace $\mathbb{R}^n$ est une variété pour l'atlas formé de la carte unique $(\mathbb{R}^n, \text{Id}_{\mathbb{R}^n})$. Plus généralement, soit $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue et $p_1 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ la projection naturelle sur le premier facteur. Alors le graphe $M_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n\}$ de f , muni de la topologie induite par la topologie usuelle de $\mathbb{R}^{m+n}$ et de l'atlas $\mathcal{A}_f = \{(M_f, p_1|_{M_f})\}$, est une variété différentiable de dimension m .

Example 3.3. Si M est une variété différentiable de dimension n , avec un atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i), i \in I\}$ et U est un ouvert de M , alors U est une variété différentiable de dimension n avec l'atlas $\mathcal{A}' = \{(U_i \cap U, \varphi_i|_{U_i \cap U}), i \in I\}$.

Example 3.4. Les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ sont des variétés de façon canonique, et leur topologie de variété coïncide avec la topologie induite par $\mathbb{R}^n$.

Example 3.5. L'ensemble de matrices $\text{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}), \det A \neq 0\}$ muni de la topologie induite par la topologie usuelle de $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$, est une variété différentiable de dimension n^2 . En effet, $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n^2}$ puisque c'est l'image inverse de l'ouvert $\mathbb{R}_0$ par l'application continue $\det : \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

Example 3.6. Cercle

Example 3.7. Sphère S^n

Example 3.8. (Tore) Le 2-tore $T = S^1 \times S^1$ est le produit de deux variétés S^1 . De la même manière, le tore de dimension n est le produit de n cercles.

Example 3.9. (Cylindre) Le cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$ obtenu par la structure variété produit est une variété de dimension 2. La variété produit $S^n \times \mathbb{R}$ est appelée cylindre de dimension $n + 1$.

3.4 Variétés orientable

Soient (x^i) et (y^j) deux systèmes de coordonnées d'un ouvert U de M .

Definition 3.6. Une variété différentiable est orientable s'il existe un atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ tel que dans un domaine commun de toute deux cartes les orientations sont les mêmes; c'est-à-dire, si:

$$\frac{D(x^i)}{D(y^j)} > 0.$$

Notons que les orientations associées avec chaque système de coordonnées (dans un domaine commun) sont opposées si, en tout point du domaine:

$$\frac{D(x^i)}{D(y^j)} < 0.$$

Definition 3.7. Une variété différentiable est orientable s'il existe un atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ tel que le jacobien de toute transformation de coordonnées $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ est positive en tout point.

À partir de la définition, nous déduisons immédiatement:

Proposition 3.1. La variété produit de variétés orientables est orientable.

Proposition 3.2. Tout ouvert d'une variété orientable est une variété orientable.

Exemple 3.10. La variété S^n ($n \geq 1$) est orientable.

L'atlas qui a permis de définir la structure de variété différentiable de S^n , n'aide pas en utilisant la définition de l'orientation. Par conséquent, nous allons choisir un autre atlas.

Considérons les ouverts:

$$U_1 = \{(x^1, \dots, x^{n+1}), x^{n+1} < 1\} \quad U_2 = \{(x^1, \dots, x^{n+1}), x^{n+1} > -1\}$$

et les pôles $N = (0, \dots, 0, 1)$ et $S = (0, \dots, 0, -1)$.

Soit φ_1 la projection stéréographique à partir du pôle nord sur le plan d'équation $x^{n+1} = 0$.

Soit φ_2 la projection stéréographique à partir du pôle sud sur le plan d'équation $x^{n+1} = 0$.

Soit ψ la symétrie par rapport au plan d'équation $x^1 = 0$.

L'atlas comprenant les cartes (U_1, φ_1) et $U_2, \psi \circ \varphi_2$ est en concordance avec la définition. En effet, la transformation

$$(\psi \circ \varphi_2) \circ \varphi_1^{-1} = \psi \circ (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})$$

est la composition d'une inversion (application dont le jacobien est toujours négatif) avec une symétrie par rapport à un plan. Ainsi, elle est un difféomorphisme avec un jacobien positif. Par conséquent la sphère S^n est orientable.

Exemple 3.11. Toutes tores ou cylindre est orientable. C'est une conséquence de la proposition précédente et le fait que S^1 et $\mathbb{R}^n$ sont orientables.

Pour prouver qu'une variété n'est pas orientable, il est facile de considérer la proposition suivante:

Proposition 3.3. *Pour qu'une variété différentiable M soit orientable il est nécessaire, pour toute paire de cartes connectées (U, φ) et (V, ψ) , le jacobien de $\psi \circ \varphi_1^{-1}$ doit avoir un signe constant sur $\varphi(U \cap V)$.*

Exemple 3.12. *Le ruban de Mobius n'est pas une variété orientable. En effet dans $\mathbb{R}^2$, considérons le ruban défini par exemple par:*

$$\{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 : |x^1| < 4\}.$$

Une relation d'équivalence peut être définie par:

$$(x'^1, x'^2) \equiv (x^1, x^2) \Leftrightarrow [x'^1 = x^1 \quad \text{et} \quad x'^2 = x^2]$$

ou

$$(x'^1, x'^2) \equiv (x^1, x^2) \Leftrightarrow [x'^1 - x^1 = 7 \quad \text{et} \quad x'^2 = -x^2].$$

Un ruban de Mobius est diagrammiquement représenté par un ruban twisté de longueur 8 (par exemple) et les parties extrême sont superposées et colés pour une longueur 1 (par exemple).

Pour définir une variété différentiable, on choisit, par exemple, des cartes dont les domaines sont:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x^1, x^2) : -4 < x^1 < 1, x^2 \in \mathbb{R}\} \\ U_2 &= \{(x^1, x^2) : -1 < x^1 < 4, x^2 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Nous choisissons la projection canonique comme un homéomorphisme, plus précisément sa restriction p_1 à l'ensemble des $x^1 \in]-4, 1[$ et sa restriction p_2 à l'ensemble des $x^1 \in]-1, 4[$.

Tout changement de coordonnées $p_2^{-1} \circ p_1$, sur le domaine d'intersection

$$U_1 \cap U_2 = \{(x^1, x^2) : -1 < x^1 < 1, x^2 \in \mathbb{R}\}$$

est tel que

$$x'^1 = x^1 \quad x'^2 = x^2$$

mais après un complete trip round le ruban, il est

$$x'^1 = x^1 + 7 \quad x'^2 = -x^2.$$

Nous voyons que le signe du jacobien n'est pas constant et ainsi le ruban de Mobius n'est pas orientable.

4 Applications différentiables entre variétés

Nous allons introduire la notion d'application de classe $\mathcal{C}^q$ entre variétés différentiable à partir de la notion de carte.

4.1 Généralités sur les applications différentiables

Soient M^m, N^n des variétés de classe $\mathcal{C}^p$, f une application continue de M^m sur N^n et x un point de M^m .

4.1.1 Applications différentiables entre variétés

Definition 4.1. Soient M et N deux variétés différentielles de classes $\mathcal{C}^p$ telles que $\dim M = m$ et $\dim N = n$. Soit x un point de M . Une application continue de M sur N est de classe $\mathcal{C}^q$ ($q \leq p$) au point x de M si pour chaque carte (U, φ) telle que $x \in U$ et chaque carte (V, ψ) telle que $y = f(x) \in V$, l'application appelée représentation locale de f

$$f_{\varphi\psi} := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

est de classe $\mathcal{C}^q$.

Une application de classe $\mathcal{C}^q$ entre variétés est aussi appelée $\mathcal{C}^q$ -morphisme.

Dans un système de coordonnées, la définition précédente donne ce qui suit:

Definition 4.2. Soient $x^1, \dots, x^m$ les coordonnées locales de x dans (U, φ) et $y^1, \dots, y^n$ les coordonnées locales de $y = f(x)$ dans (V, ψ) . Une application continue de M sur N est de classe $\mathcal{C}^q$ au point x de M si les n coordonnées locales y^i du point $y = f(x)$ sont dans un voisinage de x les n fonctions de classe $\mathcal{C}^q$

$$y^i = f^i(x^j) \quad j = 1, \dots, m$$

des m coordonnées x^i de x .

Remark 4.1. La continuité entre espace topologique est présupposée; donc en particulier l'ensemble $U \cap f^{-1}(V)$ est un ouvert.

Remark 4.2. Notons que la représentation locale $f_{\varphi\psi}$ est définie seulement sur une partie de $\varphi(U)$. En effet:

$$\begin{aligned} (x^1, \dots, x^m) &\in \varphi(U) \\ f(\varphi^{-1}(x^1, \dots, x^m)) &\in V \Rightarrow \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^m) \in f^{-1}(V) \end{aligned}$$

et $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ étant une bijection, on a:

$$(x^1, \dots, x^m) \in \varphi(U \cap f^{-1}(V)).$$

Definition 4.3. Une application f de M^m sur N^n est une application de classe $\mathcal{C}^q$ de M^m sur N^n si, pour tout x dans M^m , toute carte (admissible) (V, ψ) sur N^n est associée une carte (U, φ) de M^m telle que $x \in U, f(x) \in f(U) \subset V$ et aussi

$$f_{\varphi\psi} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

est de classe $\mathcal{C}^q$.

Definition 4.4. Soient M et N deux variétés différentiables de dimension m et n respectivement. On dit qu'une application $f : M \rightarrow N$ est différentiable si f est continue et si pour toute carte (U, φ) de M et toute carte (V, ψ) de N telles que $f(U) \subset V$, la composition

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$$

est différentiable de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Avec cette définition, toutes les applications de coordonnées d'une variété différentiable deviennent différentiables.

Cette définition permet de comprendre l'importance de la condition de différentiabilité pour les applications de changement de cartes $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ dans la définition d'atlas différentiable. En effet, étant donné une application continue $f : M \rightarrow N$, si (U, φ) et (V, ψ) sont des cartes de M et N respectivement telles que $f(U) \subset V$ et si (U', φ') et (V', ψ') sont d'autres cartes de M et N avec $U \cap U' \neq \emptyset$ satisfaisant également $f(U') \subset V'$, alors on a :

$$\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1} = (\psi' \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \varphi'^{-1}).$$

Par conséquent, si $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est différentiable, alors $\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1}$ ne le sera aussi que si les applications de changement de cartes $\psi' \circ \psi^{-1}$ et $\varphi \circ \varphi'^{-1}$ sont différentiable également.

Notation: L'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^q$ entre les variétés M^m et N^n est noté $\mathcal{C}^q(M^m; N^n)$. L'ensemble des applications différentiables (comprendre de classe $\mathcal{C}^\infty$) entre les variétés M^m et N^n est noté $\mathcal{C}^\infty(M^m; N^n)$.

Proposition 4.1. *Une application f de M^m sur N^n est une application de classe $\mathcal{C}^q$ si et seulement si pour chaque x de M^m il existe une carte (U, φ) avec $x \in U$ et une carte (V, ψ) avec $f(x) \in V$ tel que $f(U) \subset V$ et $f_{\varphi\psi} \in \mathcal{C}^q(\varphi(U); \mathbb{R}^n)$.*

De manière générale, on ne peut définir d'applications entre variétés plus régulières que les variétés elles-mêmes: applications continues entre variétés topologiques, de classe $\mathcal{C}^q$ entre variétés de classes $\mathcal{C}^q$, analytiques entre variétés analytiques et holomorphes entre variétés complexes.

La proposition suivante suivante donne un critère pratique pour montrer qu'une application entre deux variétés est différentiable:

Proposition 4.2. *Soient M, N deux variétés différentiables et $f : M \rightarrow N$ une application continue. Si $\{U_i, \varphi_i\}$ et $\{V_j, \psi_j\}$ sont des atlas pour M et N tels que pour tout i, j l'application $\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ est différentiable sur son domaine de définition, alors f est différentiable.*

Proof. Soit $x \in M$ et (U, φ) une carte de M contenant x et (V, ψ) une carte de N contenant $f(x)$. Considérons l'ouvert $\tilde{U} = f^{-1}(V) \cap U$. Puisque $f(\tilde{U}) \subset V$, les cartes $(\tilde{U}, \varphi|_{\tilde{U}})$ et (V, ψ) conviennent. $\square$

Proposition 4.3. *Soient M, N deux variétés différentiables de dimension m, n respectivement et $M \times N$ la variété différentiable produit de dimension $m + n$. Les projections canoniques sont des applications différentiables entre la variété différentiable produit $M \times N$ sur les variétés M et N respectivement.*

Proof. Considérons la projection canonique

$$p : M^m \times N^n \rightarrow M^m.$$

Il suffit de prouver qu'il existe une carte $(U \times V, \varphi \times \psi)$ sur $M^m \times N^n$ en chaque $(x, y) \in M^m \times N^n$ et une carte (U', φ') sur M^m en $x = p(x, y)$ tel que $p(U \times V) \subset U'$ et $\varphi' \circ p \circ (\varphi \times \psi)^{-1}$ est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $(\varphi \times \psi)(U \times V)$ sur $\mathbb{R}^m$.

Soient $(U \times V, \varphi \times \psi)$ une carte en (x, y) sur la variété produit et (U, φ) la carte correspondante sur M^m en x . On a :

$$p(U \times V) = U.$$

L'application suivante :

$$\begin{aligned} \varphi \circ p \circ (\varphi \times \psi)^{-1} : \quad & \rightarrow \quad \mathbb{R}^m \\ (a, b) \quad & \rightarrow_{(\varphi \times \psi)^{-1}} (\varphi^{-1}(a), \psi^{-1}(b)) \rightarrow_p \varphi^{-1}(a) \rightarrow_{\varphi} a \end{aligned}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$. □

4.1.2 Propriétés des applications différentiables

Proposition 4.4. *Soient M, M' et M'' des variétés différentiables. Soient $f \in \mathcal{C}^q(M; M')$ et $g \in \mathcal{C}^q(M'; M'')$. Alors $g \circ f \in \mathcal{C}^q(M; M'')$.*

Proof. Soient $x \in M$, $y = f(x) \in M'$ et $z = g(f(x)) \in M''$.

- D'une part, par hypothèse, il existe une carte (U', φ') sur M' en y et une carte (U'', φ'') sur M'' en z telle que :

$$g(U') \subset U'' \quad \text{et} \quad \varphi'' \circ g \circ \varphi'^{-1} \in \mathcal{C}^q(\varphi'(U'); \varphi''(U''))$$

- D'autre part, pour une carte arbitraire (U, φ) sur M en x on a :

$$f(U) \subset U' \quad \text{et} \quad \varphi' \circ f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{C}^q(\varphi(U \cap f^{-1}(U')); \varphi'(U')).$$

Mais la composition d'applications de classe $\mathcal{C}^q$:

$$\varphi'' \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1} = (\varphi'' \circ g \circ \varphi'^{-1}) \circ (\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1})$$

est de classe $\mathcal{C}^q$.

Par conséquent, pour chaque x de M , il existe une carte $(U \cap f^{-1}(U'), \varphi)$ sur M en x et une carte (U'', φ'') sur M'' en z telle que

$$(g \circ f)(U) \subset U'' \quad \text{et} \quad \varphi'' \circ g \circ f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{C}^q(\varphi(U \cap f^{-1}(U')); \varphi''(U'')).$$

En conclusion $g \circ f$ est une application de classe $\mathcal{C}^q$ de M sur M'' . □

Proposition 4.5. *Soient M, N et P des variétés différentiables de dimensions m, n et r respectivement. Soient p_1 la projection canonique de $M \times N$ sur M et p_2 la projection canonique de $M \times N$ sur N . L'application*

$$f : P \rightarrow M \times N$$

est de classe $\mathcal{C}^q$ si et seulement si les fonctions coordonnées

$$p_1 \circ f : P \rightarrow M \quad p_2 \circ f : P \rightarrow N$$

sont de classe $\mathcal{C}^q$.

Proof. La condition nécessaire est vérifiée. En effet, puisque p_1 et p_2 de classe $\mathcal{C}^q$ et f aussi, alors $p_1 \circ f$ et $p_2 \circ f$ sont de classe $\mathcal{C}^q$.

Montrons la condition suffisante. Supposons $p_1 \circ f$ et $p_2 \circ f$ sont des applications classe $\mathcal{C}^q$ de P sur M et sur N . Soient

$$z \in P, f(z) \in M \times N, (p_1 \circ f)(z) = x, (p_2 \circ f)(z) = y.$$

- L'application $p_1 \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^q$ implique qu'il existe une carte (W_1, θ_1) en z et une carte (U, φ) en x telle que

$$(p_1 \circ f)(W_1) \subset U \quad \text{et} \quad \varphi \circ (p_1 \circ f) \circ \theta_1^{-1} \in \mathcal{C}^q(\theta_1(W_1); \mathbb{R}^m).$$

- L'application $p_2 \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^q$ implique qu'il existe une carte (W_2, θ_2) en z et une carte (V, ψ) en y telle que

$$(p_2 \circ f)(W_2) \subset V \quad \text{et} \quad \psi \circ (p_2 \circ f) \circ \theta_2^{-1} \in \mathcal{C}^q(\theta_2(W_2); \mathbb{R}^n)$$

Soit la restriction

$$W = W_1 \cap W_2 \quad \theta = \theta_1|_W.$$

Pour prouver que f est une application de classe $\mathcal{C}^q$, il est suffisant de noter qu'il existe une carte (W, θ) en z et une carte $(U \times V, \varphi \times \psi)$ en $(x, y) = ((p_1 \circ f)(z), (p_2 \circ f)(z))$ telle que

$$f(W) \subset (p_1 \circ f)(W) \times (p_2 \circ f)(W) \subset U \times V \quad \text{et} \quad (\varphi \times \psi) \circ f \circ \theta^{-1} \in \mathcal{C}^q(\theta(W); \mathbb{R}^{m+n}).$$

Cette dernière application

$$(\varphi \times \psi) \circ f \circ \theta^{-1} = (\varphi \circ p_1 \circ f \circ \theta^{-1}) \times (\psi \circ p_2 \circ f \circ \theta^{-1})$$

est de classe $\mathcal{C}^q$.

- En effet, $(\varphi \circ p_1 \circ f \circ \theta^{-1})$ est de classe $\mathcal{C}^q$. On a que:

$$\varphi \circ (p_1 \circ f) \circ \theta_1^{-1} \in \mathcal{C}^q(\theta_1(W_1); \mathbb{R}^m)$$

et

$$\varphi \circ p_1 \circ f \circ \theta^{-1} = \varphi \circ (p_1 \circ f) \circ \theta_1^{-1} \circ (\theta_1 \circ \theta^{-1})$$

est de classe $\mathcal{C}^q$.

- De la même manière pour $\psi \circ p_2 \circ f \circ \theta^{-1}$.

Et la proposition est prouvée. $\square$

Proposition 4.6. Une application $f : M^m \rightarrow N^n$ est de classe $\mathcal{C}^q$ si et seulement si il existe un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de M^m tel que $f|_{U_i}$ est de classe $\mathcal{C}^q$ pour tout $i \in I$.

4.2 Applications différentiables particulières

4.2.1 Difféomorphisme et difféomorphisme local

Les difféomorphismes jouent en géométrie différentielle le même rôle que les homéomorphismes en topologie ou les isomorphismes en algèbre: ils permettent d'interchanger deux variétés différentielles.

Definition 4.5. Une application $f : M \rightarrow N$ est un $\mathcal{C}^q$ difféomorphisme s'il existe une application $g : N \rightarrow M$ de classe $\mathcal{C}^q$ telle que

$$f \circ g = \text{Id}_N \quad \text{et} \quad g \circ f = \text{Id}_M.$$

Comme conséquence les deux variétés différentielles M et N sont de même dimensions et de même classe $\mathcal{C}^q$.

Definition 4.6. Soient M et N deux variétés différentiables de même dimension. Une application f de M sur N est un $\mathcal{C}^q$ difféomorphisme de M sur N si f est une bijection de $\mathcal{C}^q(M; N)$ et $f^{-1} \in \mathcal{C}^q(N; M)$.

Definition 4.7. Soient M et N deux variétés différentiables. Une application $f : M \rightarrow N$ est un difféomorphisme si f est bijective et si f et f^{-1} sont différentiables.

Si les variétés M et N sont difféomorphes, alors elles sont homéomorphes et $\dim M = \dim N$. De plus, l'image par le difféomorphisme de l'atlas maximal de M est un atlas maximal pour N , compatible avec l'atlas maximal définissant la structure de variété différentiable sur N . Par conséquent, les atlas maximaux de M et N se correspondent via le difféomorphisme. C'est pour cela que des variétés différentiables difféomorphes considérées comme équivalentes.

Nous venons de voir que deux variétés différentiables difféomorphes sont homéomorphes. Inversement, deux variétés différentiables homéomorphes sont-elles nécessairement difféomorphes ? En d'autres termes, un espace topologique admet-il au plus une structure de variété différentiable modulo difféomorphisme ? Les résultats suivants montrent que la réponse à ces questions est négative.

Theorem 4.1. (Milnor, 1956) La sphère S^7 , munie de la topologie induite par la topologie usuelle de $\mathbb{R}^8$, admet 28 structures de variétés différentiables deux à deux non difféomorphes.

Theorem 4.2. (Donaldson, 1983) $\mathbb{R}^4$, muni de sa topologie usuelle, admet des structures différentiables exotiques.

Ces exemples montrent qu'il faut se montrer prudent et qu'il faut spécifier la structure différentiable utilisée sur un espace topologique. En pratique, cependant, on utilise la notation M pour les variétés plutôt que la notation $(M, \mathcal{A})$. Les structures différentiables utilisées ne sont généralement spécifiées que lorsqu'elles diffèrent des structures les plus naturelles (comme la structure différentielle sur S^7 que nous avons décrite au moyen des projections stéréographiques).

Notation: L'ensemble des $\mathcal{C}^q$ difféomorphismes de M sur N est noté par $\text{Diff}^q(M; N)$. L'ensemble des $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphismes de M sur N est noté par $\text{Diff}(M; N)$.

Proposition 4.7. Si M est une variété différentiable alors $\text{Diff}(M; N)$ est un groupe par rapport à la loi composition des applications.

Proof.

□

Definition 4.8. Soient M et N deux variétés différentiables de dimension m . Une application f de M sur N est un difféomorphisme local en un point x de M si le rang de f en x est égal à m . Elle est un difféomorphisme local sur M si elle est un difféomorphisme local en tout point de M .

Proposition 4.8. Une application de classe $\mathcal{C}^q$ de M sur N est un $\mathcal{C}^q$ difféomorphisme si et seulement si elle est bijective et est un difféomorphisme local sur M .

Proposition 4.9. Une bijection de M sur N est un difféomorphisme de M sur N si et seulement si en coordonnées locales x^i , les m fonctions différentiables $f^i(x^i)$, $i = 1, \dots, m$ qui définissent f ont un jacobien non nul.

4.2.2 Immersions, submersions et plongements

Definition 4.9. Soient M et N deux variétés différentiables de dimension m et n respectivement. Une application différentiable $f : M \rightarrow N$ est une immersion en un point x de M si le rang de f est égal à la dimension de M . Elle est une immersion de M sur N si elle est une immersion en tout point de M .

Remark 4.3. Il est nécessaire que $m \leq n$.

Definition 4.10. Soient M et N deux variétés différentiables de dimension m et n respectivement. Une application différentiable $f : M \rightarrow N$ est une submersion en un point x de M si le rang de f est égal à la dimension de N . Elle est une submersion de M sur N si elle est une submersion en tout point de M .

Remark 4.4. Il est nécessaire que $m \geq n$.

Definition 4.11. Soient M et N deux variétés différentiables de dimension m et n respectivement. Une application différentiable $f : M \rightarrow N$ est un plongement de M sur N si elle est une immersion injective et un homéomorphisme de N sur $f(M)$ (pour la topologie induite).

Proposition 4.10. Si $f : M^m \rightarrow N^n$ est une immersion (respectivement submersion) en un point x de M , alors il existe une carte (U, φ) de M contenant x et une carte (V, ψ) telle que $f(U) \subset V$ et

$$\begin{aligned} \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x^1, \dots, x^m) &\mapsto (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0) \\ \text{(respectivement } (x^1, \dots, x^m) &\mapsto (x^1, \dots, x^m), n \geq m). \end{aligned}$$

Proposition 4.11. Si $f : M^m \rightarrow N^n$ est une application de classe $\mathcal{C}^q$ de rang constant r sur M , alors pour chaque x de M , il existe une carte (U, φ) de M contenant x et une carte (V, ψ) de N telle que $f(U) \subset V$ et

$$\begin{aligned} \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x^1, \dots, x^m) &\mapsto (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Pour la preuve des deux propositions précédentes, on utilise le théorème du rang constant.

Proposition 4.12. *Si f est un plongement de M^m sur N^n alors l'ensemble $f(M)$ est muni d'une structure de variété différentiable (induit par le plongement).*

Proof. Si $\{(U_i, \varphi_i)_{i \in I}\}$ est un atlas de M^m alors montrons que $\{(f(U_i), \varphi_i \circ f^{-1})_{i \in I}\}$ est un atlas de $f(M^m)$.

Tout point $f(x)$ de $f(U_i)$ correspondant à $x \in U_i$ a un voisinage qui est homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^m$; et les ouverts $f(U_i)_{i \in I}$ couvrent $f(M^m)$; par ailleurs l'image de tout $x \in U_i \cap U_j$ est un point $f(x) \in f(U_i) \cap f(U_j)$. L'application

$$(\varphi_i \circ f^{-1}) \circ (\varphi_j \circ f^{-1})^{-1}$$

est un difféomorphisme entre les ouverts $\varphi_j(U_j)$ et $\varphi_i(U_i)$ de $\mathbb{R}^m$ parce que

$$(\varphi_i \circ f^{-1}) \circ (\varphi_j \circ f^{-1})^{-1} = (\varphi_i \circ f^{-1}) \circ (f \circ \varphi_j^{-1}) = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$$

et que (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) sont des cartes de l'atlas de M^m . $\square$

4.3 Pull-back d'une fonction

Soient M^m et N^n des variétés différentiables.

4.3.1 Fonctions différentiables sur une variété

Soit $g : M^m \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g(x)$ une fonction sur M^m .

Definition 4.12. *Une fonction g sur M^m est de classe $\mathcal{C}^q$ en un point x de M^m si il existe une carte (U, φ) contenant x telle que*

$$g \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

est une fonction de classe $\mathcal{C}^q$ sur l'ouvert $\varphi(U)$ de $\mathbb{R}^m$.

Cette fonction $g \circ \varphi^{-1}$ est appelée fonction g exprimée par rapport aux coordonnées locales ou fonction g lue sur la carte.

Definition 4.13. *Soit $(M^m, \mathcal{A})$ le couple d'une variété différentielle M de classe $\mathcal{C}^k$ ($1 \leq k \leq +\infty$) de dimension m et d'un atlas $\mathcal{A}$ sur M . Une fonction $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^q$, $q \leq k$ sur M si pour toute carte locale (U_i, φ_i) la fonction $g_i = g \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i) \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^q$ comme fonction définie sur l'ouvert $\varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^m$.*

Remark 4.5. *Cette définition ne dépend pas du choix d'un atlas dans une classe d'atlas deux à deux compatibles. A cet effet considérons un atlas $\mathcal{A}' = (U_j, \varphi_j)$ compatible avec $\mathcal{A}$. Soient $x \in U_j \cap U_i$ et $V_x \subset U_i$, un voisinage ouvert de x . Étant donnée la fonction $g_j = g \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(V_x) \rightarrow \mathbb{R}$ nous avons*

$$g_j = g \circ \varphi_j^{-1} = (g_i \circ \varphi_i^{-1}) \circ \varphi_j^{-1}.$$

Par définitions, g_i est de classe $\mathcal{C}^q$, φ_i^{-1} et φ_j^{-1} de classe $\mathcal{C}^k$, par suite g_j est de classe $\mathcal{C}^q$ ($q \leq k$) ce qui montre que la définition est bien consistante.

Proposition 4.13. *Une fonction g de classe $\mathcal{C}^q$ dans un système de coordonnées local est automatiquement de classe $\mathcal{C}^q$ dans tout autre système de coordonnées admissible.*

Définition 4.14. Une fonction g est de classe $\mathcal{C}^q$ sur M^m si elle est de classe $\mathcal{C}^q$ en tout point de M^m .

Nous noterons $\mathcal{C}^q(M, \mathbb{R})$ ou simplement $\mathcal{C}^q(M)$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^q$ sur M .

Exemple 4.1. Soit $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ une carte locale sur une variété différentielle M de dimension m et de classe $\mathcal{C}^q$. φ_α est une application vectorielle sur M à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Pour $x \in U_\alpha \subset M$, on a :

$$\varphi_\alpha(x) = (x_1^\alpha, \dots, x_m^\alpha) \in \mathbb{R}^m.$$

La i -ème fonction coordonnée $x_i : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ envoie le point $x \in U_\alpha$ sur la i -ème coordonnée x_i^α du vecteur $\varphi_\alpha(x)$ dans $\mathbb{R}$. Si π_i est la i -ème projection de $\mathbb{R}^m$ sur $\mathbb{R}$, alors nous avons

$$\pi_i := x_i \circ \varphi_\alpha^{-1}.$$

La projection π_i étant une forme linéaire sur $\mathbb{R}^m$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Par conséquent, la fonction coordonnée x_i est de classe $\mathcal{C}^q$. Les fonctions coordonnées, sur une variété différentiable M sont de même classe que la variété.

4.3.2 Pull back d'une fonction

Définition 4.15. Soient f une application différentiable de M sur N et h une fonction différentiable sur N . Le pull-back de la fonction h par f est

$$f^*h = h \circ f.$$

L'application f^* est aussi définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^\infty(N; \mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{R}) \\ h &\mapsto f^*h. \end{aligned}$$

Par conséquent, à partir d'une application $f : M \rightarrow N$ nous avons construit une application induite

$$f^* : \mathcal{C}^\infty(N; \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{R}). \quad (1)$$

L'application f^* est parfois appelée le dual de l'application $f : M \rightarrow N$. Si $h \in \mathcal{C}^\infty(N; \mathbb{R})$, la fonction f^*h dans $\mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{R})$ est couramment appelée le pull-back de h par f , ou de façon très impropre image réciproque de h .

Proposition 4.14. Soit f une application différentiable de M sur N . Alors f^* est un homomorphisme d'algèbres. De plus si $f_1 : M \rightarrow N_1$ et $f_2 : N_1 \rightarrow N_2$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur M et N_1 , alors $f = f_2 \circ f_1$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur M et

$$f^* = (f_2 \circ f_1)^* = f_1^* \circ f_2^*.$$

Proof. Soient φ et ψ dans $\mathcal{C}^\infty(N; \mathbb{R})$ alors nous avons, pour $f : M \rightarrow N$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur M et $x \in M$,

$$\begin{aligned} f^*(\varphi\psi)(x) &= ((\varphi\psi) \circ f)(x) \\ &= (\varphi\psi)(f(x)) = \varphi(f(x))\psi(f(x)) \\ &= (f^*\varphi)(x)(f^*\psi)(x) = ((f^*\varphi)(f^*\psi))(x). \end{aligned}$$

La $\mathbb{R}$ -linéarité de f^* sur $\mathcal{C}^\infty(N; \mathbb{R})$ est encore plus immédiate.

Soit l'application $M \rightarrow N_1 \rightarrow N_2$ composée de deux applications f_1 et f_2 de classe $\mathcal{C}^\infty$. Alors pour $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(N_2; \mathbb{R})$, nous avons pour $f = f_2 \circ f_1$ et $x \in M$

$$\begin{aligned}(f^* \varphi)(x) &= ((f_2 \circ f_1)^* \varphi)(x) \\ &= \varphi((f_2 \circ f_1)(x)) \\ &= \varphi(f_2(f_1(x))) \\ &= [(f_1^* \circ f_2^*) \varphi](x).\end{aligned}$$

Ainsi $(f_2 \circ f_1)^* = f_1^* \circ f_2^*$. □

4.3.3 Dérivée partielle d'une fonction

Definition 4.16. Soit f une fonction différentiable sur une variété différentielle M . On appelle dérivée partielle première de f au point x du domaine U_α de la carte locale $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ la fonction définie sur U_α par

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = D_i(f \circ \varphi_\alpha^{-1})\varphi_\alpha(x) = \frac{\partial (f \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial x_i^\alpha}(\varphi_\alpha(x)).$$

Tout changement différentiable de coordonnées locales sur M se traduit dans les dérivées partielles par la formule de dérivation des fonctions composées ou la règle de la chaîne. Plus précisément on a:

Proposition 4.15. Soient $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ et (U_β, φ_β) deux cartes locales sur une variété différentielle $(M, \mathcal{A})$ de dimension n telles que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Pour $x, y \in U_\alpha \cap U_\beta$, posons

$$\varphi_\alpha(x) = (x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha) \quad \text{et} \quad \varphi_\beta(y) = (y_1^\alpha, \dots, y_n^\alpha).$$

Supposons de plus que $y = (\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)(x)$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$. Alors nous avons pour une fonction f différentiable sur $U_\alpha \cap U_\beta$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i^\alpha} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_j^\beta} \cdot \frac{\partial y_j^\beta}{\partial x_i^\alpha}$$

où les x_i^α et y_j^β sont les i -èmes fonctions coordonnées de x et y respectivement.

Exemple 4.2. Soit (x, y) le système de coordonnées cartésiennes sur $\mathbb{R}^2$. Soit (r, θ) les coordonnées polaires. Sur l'ouvert $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$ on opère le changement de coordonnées

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta.$$

Si f est une fonction de (x, y) alors on a:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}.\end{aligned}$$

5 Sous-variétés

5.1 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Pour $m \leq n$, l'inclusion canonique $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ sera notée

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0).$$

Definition 5.1. Soit V une partie de $\mathbb{R}^n$, on dit que V est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, de dimension m de classe $\mathcal{C}^q$, si pour tout x de V , il existe un ouvert U_x de $\mathbb{R}^n$, contenant x , un difféomorphisme f de classe $\mathcal{C}^q$ de U_x sur son image $f(U_x)$ ouvert de $\mathbb{R}^n$, tel que

$$f(U_x \cap V) = f(U_x) \cap \mathbb{R}^m.$$

L'entier $n - m$ est alors appelé la codimension de V .

Proposition 5.1. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application de classe $\mathcal{C}^q$, y un point de $\mathbb{R}^m$ et $V = f^{-1}(y)$. Si f est une submersion en tout point de V , alors V est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - m$.

Proof. Soit x un point de V . Alors par le théorème des submersions, ils existent un ouvert U_x (de U) contenant x , un ouvert U_y de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ contenant y et un $\mathcal{C}^q$ difféomorphisme

$$g : U_x \rightarrow U_y : x' \mapsto g(x')$$

tel que pour chaque x' de U_x

$$\prod(g(x')) = f(x')$$

où $\prod$ est la projection canonique de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ sur $\mathbb{R}^m$.

Nous avons la suite suivante pour tout x'

$$\begin{aligned} x' \in U_x \cap V &\Leftrightarrow [x' \in U_x \text{ et } x' \in V] \\ &\Leftrightarrow [x' \in U_x \text{ et } f(x') = y] \\ &\Leftrightarrow [x' \in U_x \text{ et } \prod(g(x')) = y] \\ &\Leftrightarrow [x' \in U_x \text{ et } g(x') \in \{y\} \times \mathbb{R}^{n-m} = y] \end{aligned}$$

et ainsi

$$g(U_x \cap V) = g(U_x) \cap (\{y\} \times \mathbb{R}^{n-m}).$$

Par la définition d'une sous-variété, on a: V est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - m$. $\square$

Par la proposition précédente, on peut déduire une autre très utile en pratique.

Proposition 5.2. Soient $f^i : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ m fonctions de classe $\mathcal{C}^q$ et

$$V = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : f^i(x_1, \dots, x_n) = 0, \forall i \in [1, \dots, m]\}.$$

Si pour tout point x de V le rang de la matrice jacobienne

$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial x_j} \right) \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

est $m \leq n$, alors V est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - m$.

Proof. Nous rappelons que f est une submersion en x ssi sa matrice jacobienne en x est de rang m . La proposition vient de la proposition précédente où f est définie par les éléments de $\mathbb{R}^n$:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left(f^1(x_1, \dots, x_n), \dots, f^m(x_1, \dots, x_n) \right)$$

et le point y is $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$. □

Exemple 5.1. Une ellipse est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1. En effet, considérons l'ellipse

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, z = 0 \right\}.$$

La matrice jacobienne suivante:

$$\begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} & \frac{2y}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est de rang 2 en chaque point V . Ainsi V est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1.

Un cas spécial de la proposition précédente est le suivant:

Proposition 5.3. Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^q et

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) = 0\}.$$

Si pour tout x de V une des dérivées partielles de f est non nulle (gradient de f non nul), alors V est une sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - 1$.

Exemple 5.2. L'hyperbolide à une nappe d'équation

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1. En effet, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$ et $\text{grad} f = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, -\frac{2z}{c^2} \right)$ est non nul en tout point de l'hyperbolide.

Exemple 5.3. Par la proposition précédente, on a:

1. La sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$;
2. l'ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$;
3. l'hyperboloïde à deux nappes d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$;
4. le paraboloïde elliptique d'équation $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$
5. et le paraboloïde hyperbolique d'équation $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.

Exemple 5.4. Le cône d'équation $z^2 = x^2 + y^2$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. L'origine est un point de singularité. Il est nécessaire d'enlever l'origine (singularité) pour obtenir une variété. Dans ce cas, $\text{grad} f = (2x, 2y, -2z)$ est différent de 0 sur l'ouvert $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ et ainsi la proposition précédente est applicable.

Une autre proposition intéressante qui conduit à l'existence des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 5.4. Si $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une immersion injective, si $f^{-1} : V = f(U) \rightarrow U$ est une application continue, alors V est une sous-variété de dimension m de $\mathbb{R}^n$.

Proof. Traitons le cas $m = 1$ et $n = 2$. Soit $y \in V$ tel que $y = f(x)$ avec $x \in U$. Par le théorème des immersions ils existent:

- un ouvert V_x de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ contenant x tel que $V_x \cap \mathbb{R}^m \subset U$,
- un ouvert $V_{f(x)}$ de $\mathbb{R}^n$ contenant y ,
- un $\mathcal{C}^q$ difféomorphisme $g : V_x \rightarrow V_{f(x)}$ qui a la même restriction que f sur $V_x \cap \mathbb{R}^m$.

La continuité de f^{-1} en y implique qu'il existe un ouvert $V'_{f(x)}$ de $\mathbb{R}^n$ contenant y et inclus dans $V_{f(x)}$ tel que

$$\forall y' \in V'_{f(x)} \cap V \Rightarrow f^{-1}(y') \in V_x.$$

La restriction de g^{-1} à $V'_{f(x)}$ est un $\mathcal{C}^q$ difféomorphisme de $V'_{f(x)}$ sur un ouvert $V'_x \subset V_x$. La restriction de g à V'_x est un $\mathcal{C}^q$ difféomorphisme noté

$$g|_{V'_x} \rightarrow V'_{f(x)}.$$

1. D'une part, puisque g et f ont la même restriction à V'_x , on a:

$$\forall t \in V'_x \cap \mathbb{R}^m : g|_{V'_x}(t) = f(t) \in V'_{f(x)} \cap V.$$

2. D'autre part, si nous avons:

$$y' \in V'_{f(x)} \cap V \Rightarrow f^{-1}(y') \in V_x$$

alors il existe $t \in V_x \cap \mathbb{R}^m$ tel que $f(t) = y'$. Mais $y' \in V'_{f(x)}$, ainsi

$$t \in V'_x \cap \mathbb{R}^m.$$

On déduit que, $V'_{f(x)} \cap V$ est l'image de $V'_x \cap \mathbb{R}^m$ par $g|_{V'_x}$, c'est-à-dire:

$$g^{-1}|_{V'_x}(V'_{f(x)} \cap V) = V'_x \cap \mathbb{R}^m.$$

Ceci signifie que V est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension m puisque $V'_x = g^{-1}|_{V'_x}(V'_{f(x)})$. $\square$

Exemple 5.5. Si $U =]-\pi/2, \pi/2[\times]0, 2\pi[$ et

$$f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (\lambda, \phi) \mapsto (x = \cos \lambda \cos \phi, y = \cos \lambda \sin \phi, z = \sin \lambda).$$

Alors $f(U)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.

En effet, les trois hypothèses de la proposition précédente sont satisfaites.

- La matrice jacobienne de f est:

$$\begin{pmatrix} -\sin \lambda \cos \phi & -\cos \lambda \sin \phi \\ -\sin \lambda \sin \phi & \cos \lambda \cos \phi \\ \cos \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang maximal égal à 2. Donc f est une immersion.

- L'application f est injective, parce que:

$$\forall (\lambda, \phi), (\lambda', \phi') \in U : f(\lambda, \phi) = f(\lambda', \phi') \Rightarrow (\lambda, \phi) = (\lambda', \phi').$$

En effet, à partir $\sin \lambda = \sin \lambda'$, on déduit $\lambda = \lambda'$. À partir de légalité: $\cos \lambda \sin \phi = \cos \lambda \sin \phi'$, on déduit $\cos \phi = \cos \phi'$ et $\sin \phi = \sin \phi'$ (parce que $\cos \phi \neq 0$) et ainsi $\phi = \phi'$.

- L'application $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$ est continue puisque $\lambda = \arcsin z$ et $\phi = \arctan \frac{y}{x}$.

Par conséquent $f(U)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

5.2 Sous-variété d'une variété

Définition 5.2. Un sous-ensemble W d'une variété M de dimension n est une sous-variété de M de dimension $m \leq n$ si pour chaque point $x \in W$ il existe une carte (U, φ) dans M contenant x telle que:

$$\varphi(U \cap W) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^m.$$

Une carte (U, φ) telle que $\varphi(U \cap W)$ est l'ensemble des points $(x^1, \dots, x^n)$ de $\varphi(U)$ satisfaisant $x^{m+1} = \dots = x^n = 0$ est dit adaptée à W .

Exemple 5.6. Pour $n = 3$ et $m = 2$, on a:

$$\varphi(U \cap W) = \{(x^1, x^2, x^2) \in \varphi(U), x^3 = 0\}.$$

Proposition 5.5. Étant donnée deux variétés différentiables M^m et N^n si $f : M \rightarrow N$ est de classe C^q et de rang constant r sur M , alors, pour chaque point $y \in f(M)$, $f^{-1}(y)$ est une sous-variété de M de dimension $n - r$.

Proposition 5.6. Si $f : M^m \rightarrow N^n$ est une application de classe C^q entre deux variétés différentiables, si y est un point de $f(M)$ et si f est une submersion en chaque point de $f^{-1}(y)$, alors $f^{-1}(y)$ est une sous-variété de M de dimension $m - n$.

Proposition 5.7. Un sous-ensemble W de M^m défini par n équations $f^i(x) = 0$ et f ayant rang n en chaque point de W est une sous-variété différentiable de M de dimension $m - n$.

6 Exemples