2019-2020
Pr. A. SY

UNIVERSITÉ ALIOUNE DIOP DE BAMBEY
UFR-SATIC - Départements de Mathématiques
L-3 Statistique et Indormatique Décisionnelle (SID)
Série 1 : Optimisation et d'analyse convexe.

Exercise 1 *Soit* $\theta \in \Gamma_0(\mathbb{R})$ *paire et* $f \in \Gamma_0(\mathbb{R}^n)$ *définie par* $f(x) = \theta(\|x\|)$.
a) Exprimer f^* *en fonction de* θ^*.
b) En déduire l'expression suivante de $\partial f(x)$.

$$\partial f(x) = \{s \in \mathbb{R}^n \mid \|s\| \in \partial\theta(\|x\|) \text{ et } \langle x, s\rangle = \|x\|.\|s\|\}.$$

Exercise 2 *Soit* $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ *définie positive. Montrer à l'aide d'un calcul simple de conjuguée de fonction convexe, l'égalité suivante*

$$A + A^{-1} \geq 2I_n$$

Exercise 3 *On se propose de trouver une primitive de la fonction* $s \longmapsto Argshs$ *(notée aussi* $(sh)^{-1}(s)$*) par l'intermédiare de la transformation de Legendre-Fenchel.*
1) Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto f(x) = ch(x)$. *Déterminer* f^*.
2) Indiquer pourquoi f^* *est une primitive de la fonction* $Argsh$.

Exercise 4 *Soit* $f \in \Gamma_0(\mathbb{R})$ *définie de la façon suivante :*

$$f(x) = \begin{cases} x\ln x + \frac{x^2}{2} - x & si x \geq 0 \ (avec\ 0 \ln 0 = 0) \\ +\infty & si\ x < 0. \end{cases}$$

Ici f^* *ne peut être exprimée analytiquement à l'aide de fonctions usuelles. Considérons la fonction :* $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, *dite de Lambert, définie comme l'inverse de la fonction* $x \longmapsto xe^x$ *(c'est-à-dire : pour tout* $u \geq 0$, $x = l(u)$ *est solution de* $xe^x = u$*).*
Exprimer f^* *à l'aide de* l *et des fonctions usuelles.*

Exercise 5 *Soient* f *et* g *dans* $\Gamma_0(\mathbb{R})$ *telles que* $f+g$ *soit une fonction affine sur* $\mathbb{R}^n$. *Monter que* f g *sont nécessairement affines sur* $\mathbb{R}^n$.
Indication : Calculer $(f+g)^*$.

Exercise 6 *Soit* $f\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que* $\partial f(x) \neq \emptyset$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$*. Montrer qu'une tlle fonction est nécessairement convexe sur* $\mathbb{R}^n$

Problème 7 *Soit* $f \in \Gamma_0(\mathbb{R}^n)$*. Soit* $\theta \in \Gamma_0(\mathbb{R}^n)$ *vérifiant les hypothèses suivantes :*

$$\theta \text{ est finie en } 0; \lim_{\|x\| \longrightarrow 0} \frac{\theta(x)}{\|x\|} = +\infty \tag{1}$$

On se propose dans cet exercice de donner les formes explicites des solutions d'équations aux dérivées partielles (dites de Halilton-Jacobi) suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} + \theta^*(\nabla_x F) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^n \times]0, +\infty[\\ F(x, 0) = f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

(Dans cette écriture, $\partial F/\partial t$ *et* ∇_x *désignent respectivement la dérivée partielle par rapport à* t *et le vecteur gradient par rapport à* $x = (x_1, ..., x_n)$ *de la fonction* $F; (x,t) \in \mathbb{R}^n \times]0, +\infty[\longmapsto F(x,t) \in \mathbb{R}$*.)*
1. Préliminaires : a) Soit

$$H : (y, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longmapsto H(y, s) = \begin{cases} f^*(y) \text{ si } \theta^*(y) \leq s \\ +\infty \text{ sinon }. \end{cases}$$

Vérifier que $H \in \Gamma_0(\mathbb{R})$ *et déterminer sa conjuguée* H^**.*
b) Posons

$$F : (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longmapsto F(x,t) = \begin{cases} \inf_{u \in \mathbb{R}^n} \{f(u) + t\theta\left(\frac{x-u}{t}\right)\} \text{ si } t > 0 \\ f(x) \text{ si } t = 0 \\ +\infty \text{ sit} < 0. \end{cases}$$

Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$F(x,t) \longrightarrow f(x) \text{ quand } t \longrightarrow 0^+.$$

2) Outre les hypothèses de (1), on suppose que ;
θ *est différentiable en tout point où elle admet des sous-gradients.*
Montrer qu'alors F *est différentiable en tout point* (x,t) *de* $int(domF)(\subset \mathbb{R}^n \times]0, +\infty[)$ *et y vérifie*

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) + \theta^*(\nabla_x F(x,t)) = 0.$$

3) Donner des formes explicites de solutions d'équations d'Hamilton-Jacobi suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\|\nabla_x F\|^2 = 0 \\ \lim_{t \longrightarrow 0^+} F(.,t) = F(.,0) = f. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} + \sqrt{1 + \|\nabla_x F\|^2} = 0 \\ \lim_{t \longrightarrow 0^+} F(.,t) = F(.,0) = f. \end{cases}$$

(Dans ces équations, $\|.\|$ désigne la norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^n$).

Exercise 8 *Soient f et g dans $\Gamma_0(\mathbb{R})$ telles que $f+g$ soit une fonction affine sur $\mathbb{R}^n$. Monter que f et g sont nécessairement affines sur $\mathbb{R}^n$.*
Indication : Calculer $(f+g)^*$.

Exercise 9 *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$).*
Montrer que :
1. f^* est convexe même si f ne l'est pas.
2. f^{**} est convexe et que $f^{**} \leq f$. Et que si de plus f est convexe, et finie, alors $f^{**} = f$.
3. L'identité $f^{***} = f^*$ a toujours lieu.
4. Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, est convexe et finie, alors

$$f(x) + f^*(\nabla f(x)) = \langle \nabla f(x), x \rangle.$$

5. Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est strictement convexe et

$$\lim_{|x| \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{|x|} = +\infty$$

alors $f^* \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$. Si de plus $f \in (\mathbb{R}^n)$ et

$$f(x) + f^*(s) = \langle s, x \rangle$$

alors

$$s = \nabla f(x) \quad et \quad x = \nabla f^*(s).$$

Exercise 10 *Soit $E = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ structuré en espace euclidien à l'aide du produit scalaire $\langle\langle .,. \rangle\rangle$ (on rappelle que $\langle\langle A, B \rangle\rangle = tr(AB)$ est la trace de AB). Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie comme suit :*

$$\forall X \in E, \ f(X) = \frac{1}{n}\|X\|^2 - \left(\frac{tr(X)}{n}\right)^2$$

On souhaite calculer f^*, c'est-à-dire

$$S \in E \mapsto \; f^*(S) = \sup_{X \in E} \{ \langle\langle S, X \rangle\rangle - f(X) \}$$

1) Montrer que

$$f(X) = \frac{1}{n} \| X - \frac{tr(X)}{n} I_n \|^2, \quad \textit{pour tout} \;\; X \in E.$$

En déduire que f est convexe sur E.
2) a) Montrer que le supremum de la fonction $X \mapsto \langle\langle S, X \rangle\rangle - f(X)$ sur E est fini et atteint si, et seulement si $tr(S) = 0$.
En déduire $f^*(S)$ lorsque $tr(S) = 0$.
b) Montrer que $f^*(S) = +\infty$ si $tr(S) \neq 0$.