

UNIVERSITÉ ALIOUNE DIOP DE BAMBEY
UFR-SATIC - Départements de Mathématiques
L-3 Statistique et Indormatique Décisionnelle (SID)
 Série 1 : Optimisation et d'analyse convexe.

Exercice 1 On note $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ et $\|.\|$ la norme euclidienne associée. Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ définie positive. On définit :

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle A(x - a), x - a \rangle \leq 1\};$$

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| \leq 1\};$$

$$l : (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longmapsto l(x, y) = \langle x, y \rangle.$$

- 1) a) Indiquer rapidement pourquoi l a des points selles sur $X \times Y$.
 b) Soit $(\bar{x}, \bar{y})$ un point selle de l sur $X \times Y$
 - Montrer que $\bar{x}$ est la projection de l'origine sur X ;
 - Quelle est la valeur selle de l sur $X \times Y$?
 - En déduire $\bar{y}$.
- 2) Etant donné $y \in Y$, on considère le problème de minimisation suivant

$$(\mathcal{P}_y) \quad \begin{cases} \text{Minimiser } l(x, y) \\ x \in X \end{cases}$$

Résoudre complètement $(\mathcal{P}_y)$.

On suppose que $0 \notin X$. Déduire de ce qui précède

—

$$\min_{x \in X} \|x\| = \max_{\|y\| \leq 1} \left[\langle a, y \rangle - \sqrt{\langle A^{-1}y, y \rangle} \right]$$

- le maximum de l'expression de droite ci-dessus est atteint en $\bar{y} = \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}$, où $\bar{x}$ désigne la projection orthogonale de 0 sur X .

Exercice 2 Etant donné $s \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $c \in \mathbb{R}^n$, on considère le problème de minimisation suivant

$$(\mathcal{P}) \quad \text{Minimiser } \left\{ \frac{1}{2} \|x\|^2 - \langle c, x \rangle \right\}; \text{ sous la contrainte } \langle s, x \rangle \leq 0.$$

1) Déterminer la fonction duale $\mu \in \mathbb{R}^+ \mapsto \psi(\mu)$ associée au lagrangien

$$\mathcal{L}(x, \mu) \mapsto \mathcal{L}(x, \mu) = \frac{1}{2}\|x\|^2 - \langle c, x \rangle + \mu \langle s, x \rangle$$

2) Résoudre le problème dual $(\mathcal{D})$ associé à $(\mathcal{P})$, c'est-à-dire celui de la maximisation de ψ sur $\mathbb{R}^+$. (On sera amené à considérer plusieurs cas suivant le signe de $\langle c, s \rangle$).

3) Utiliser le résultat précédent pour résoudre effectivement $(\mathcal{P})$.

Exercice 3 1) Considérons le problème de minimisation (de base) suivant :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \min f(x); \\ h_1(x) = 0, \dots, h_m(x) = 0. \end{cases}$$

Pour tout $r > 0$, on pose $f_r = f + \frac{r}{2} \sum_{i=1}^m h_i^2$ et on considère la version modifiée $(\mathcal{P}_r)$ de $(\mathcal{P})$ ci-dessous

$$(\mathcal{P}_r) \quad \begin{cases} \min f_r(x); \\ h_1(x) = 0, \dots, h_m(x) = 0. \end{cases}$$

a) Vérifier que les problèmes $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}_r)$ sont équivalents.

b) Soit

$$\mathcal{L}_r : (x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathcal{L}_r(x, \lambda) = f_r(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x)$$

$$= f(x) + \frac{r}{2} \sum_{i=1}^m [h_i(x)]^2 + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x)$$

le lagrangien usuel pour le problème $(\mathcal{P}_r)$. On l'appelle lagrangien augmenté du problème $(\mathcal{P})$.

— Comparer $\mathcal{L}_r$ et le lagrangien usuel $\mathcal{L}$ du problème $(\mathcal{P})$.

— Ecrire le problème dual $(\mathcal{D}_r)$ dit augmenté dérivé de $\mathcal{L}_r$.

2) On désire écrire un lagrangien augmenté pour le problème de minimisation avec des contraintes dy type inégalité ci-dessous

$$(\mathcal{Q}) \quad \begin{cases} \min f(x) \\ g_1(x) \leq 0, \dots, g_p(x) \leq 0. \end{cases}$$

Pour ce faire, on considère le problème $(\widehat{\mathcal{Q}})$ suivant, prolongement de $(\mathcal{Q})$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$:

$$(\widehat{\mathcal{Q}}) \quad \begin{cases} \min f(x) \\ g_j(x) + y_j^2(x) = 0, \quad j = 1 \dots p. \end{cases}$$

Soit $\widehat{\mathcal{L}}_r : ((x, y), \lambda) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p) \times \mathbb{R}^p \mapsto \widehat{\mathcal{L}}_r((x, y), \lambda)$ le lagrangien augmenté associé à $(\widehat{\mathcal{Q}}_r)$ suivant la définition précédente. Comme l'expression de la fonction duale dérivée de $\widehat{\mathcal{L}}_r$ conduit à calculer

$$\lambda \in \mathbb{R}^p \mapsto \inf_{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p} \widehat{\mathcal{L}}_r(x, y, \lambda) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} [\inf_{y \in \mathbb{R}^p} \widehat{\mathcal{L}}_r(x, y, \lambda)]$$

On se propose de définir directement un lagrangien augmenté associé à $(\mathcal{Q})$ en posant

$$\mathcal{L}_r(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mapsto \mathcal{L}_r(x, \lambda) = \inf_{y \in \mathbb{R}^p} \widehat{\mathcal{L}}_r(x, y, \lambda)$$

a) Démontrer que

$$\mathcal{L}_r(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^p \varphi_r(\lambda_j, g_j(x))$$

où $\varphi_r : (\alpha, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \varphi_r(\alpha, t) = \frac{1}{2r} \{[\max\{0, \alpha + rt\}]^2 - \alpha^2\}$.

b) - Dédurre du comportement de $\varphi_r(\alpha, t)$, lorsque $r \rightarrow 0^+$, ce que devient $\mathcal{L}_r(x, \lambda)$ quand $r \rightarrow 0^+$

- Donner quelques premiers éléments de comparaison entre la fonction duale Θ_r de $\mathcal{L}_r$ et la fonction duale usuelle Θ .

- Quelles propriétés de $\mathcal{L}_r$ peut-on déduire des hypothèses de type convexité ou différentiabilité des données du problème $(\mathcal{Q})$.