Table des matières

Chapitre 1

Optimisation en dimension infinie

Dans ce chapitre, nous allons discuter des notions de base et des propriétés pour un problème d'optimisation non linéaire, par des techniques généraux d'analyse fonctionnelle. Il va en rsulter des propriétés fondamentales telles que la notion de solutions, leurs existences et des concptes de dérivation.

1.1 Notion de solutions

Soit $\mathcal{U}$ un espace topologique et $J : \mathcal{U} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonctionnelle, nous cherchons la solution de

$$\min_{u \in \mathcal{U}} J(u)$$

Dans le cas d'un problème d'optimisation avec contraintes, $u \in \mathcal{C}$, on peut toujours poser $J(u) = +\infty$ si $u \in \mathcal{C}$ et donc un minimum ne peut être atteint que sur $\mathcal{U} \setminus \mathcal{C}$ si J est une fonction propre, c'es-à-dire

$$\exists u_0 \in \mathcal{C} \ J(u_0) = +\infty.$$

Nous distinguerons toujours deux types de solutions, notamment une solution locale et une solution globale.

Définition 1.1.1 *Un point $u \in \mathcal{U}$ est dit :*

— *minimiseur local, s'il existe un ensemble ouvert $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ tel que $u \in \mathcal{V}$ et*

$$J(u) \leq J(v), \quad v \in \mathcal{V};$$

— *minimiseur global, si*

$$J(u) \leq J(v), \quad v \in \mathcal{U} \tag{1.1}$$

Nous verrons dans le suite que le minimiseur local des fonctions régulières peuvent être caractériser par des dérivées du premier ou du second ordre. Pour les optima globaux, il n'existe pas en général d'autres conditions que (1.1). Evidamment, tout minimiseur global est aussi minimiseur local, mais la réciproque est fausse en général.

1.2 Existence de solutions

Pour obtenir l'existence solutions pour un problème d'optimisation général, deux propriétés de base sont nécessaires : la compacité et la semi-continuité inférieure, dont nous rappellons les définitions.

Définition 1.2.1 *Soit $(\mathcal{U}, \mathcal{T})$ un espace topologique, et $J : \mathcal{U} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. La fonctionnelle J est dite semi-continue inférieurement (sci) en $u \in \mathcal{U}$ si*

$$J(u) \leq \sup_{\mathcal{V} \in \mathcal{T}} \inf_{v \in \mathcal{V}} J(v).$$

Si $\mathcal{U}$ est un espace métrique, cette définition est équivalente à la caractérisation par les suites. La fonctionnelle J est sci en u si

$$J(u) \leq \liminf_{k \longrightarrow \infty} J(u_k) \tag{1.2}$$

pour toute suite (u_k) convergente vers u.

Théorème 1.2.2 *Soient $J : \mathcal{U} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonctionnelle sci et l'ensemble de niveau*

$$\{u \in \mathcal{U} / J(u) \leq M\}$$

supposé non vide pour un certain $M \in \mathbb{R}$ donné. Alors le problème

$$\min_{u \in \mathcal{U}} J(u)$$

admet un minimum global.

Preuve. Soit $\alpha = \inf_{u \in \mathcal{U}} J(u)$. Alors il existe une suite minimisantes (u_k) telle que $J(u_k) \longrightarrow \alpha$. Pour k suffisamment grand, on doit avoir $J(u_k) \leq M$ et donc (u_k) est contenue dans un compact. Par conséquent, il existe une sous-suite (u_{k_l}) telle que u_{k_l} converge vers $\tilde{u}$ avec $\tilde{u} \in \mathcal{U}$.
D'après la semi-continuité inférieure de J, on obteint

$$\alpha \leq J(\tilde{u}) \leq \liminf_{k \longrightarrow +\infty} J(u_k) = \alpha$$

d'où $\tilde{u}$ est un minimiseur global. ■

Remarque 1.2.3 *Pour obtenir la preuve précédente, on voit que pour obtenir l'existence de minimiseur, la suite sci définie par (1.2) est suffisante dans le cas d'un espace métrique, même non métrisable.*

Corollaire 1.2.4 *Sous les conditions du thèoréme précédent, l'ensemble G des minimiseurs globaux est compact*

Preuve. Comme tout minimiseur global est sur une ligne de niveau $\{J(u) \leq M\}$, alors on obtient un précompact. La fermiture de cet ensemble vient de la semi-continuité, comme tout u de la fermiture de G, on obtient de G, on obteint

$$\alpha \leq J(u) \leq \sup_{\mathcal{V}\in\mathcal{T}} \inf_{v\in\mathcal{V}} J(v) \leq \alpha$$

■

Remarque 1.2.5 *En dimension finie, la compacité des lignes de niveau vient en général du fait qu'il soit bornée, ce qui n'est pas vraie en dimension infinie. Une propriété similaire est vérifée pour les espaces de Hilbert (et plus généralement, pour les espaces duaux des espaces de Banach, qui est parfois est appelé Lemme de Eberlin-Smullyan.*

Lemme 1.2.6 *Soit $\mathcal{U}$ un espace de Hilbert et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $\mathcal{U}$. Alors, il existe une sous-suite (u_{kl}) faiblement convergent, ie.*

$$\langle v, u_{kl}\rangle \longrightarrow \langle v, \tilde{u}\rangle, \quad \forall v \in \mathcal{U}$$

pour $u \in \mathcal{U}$.

Définition 1.2.7 *Soient (u_k) une suite de $\mathcal{V}$ et $u \in \mathcal{V}$. On dit que u_k converge faiblement * vers u et on note $u_k \rightharpoonup u$ si pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$, on*

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega u_k\varphi dx \longrightarrow \int_\Omega u\varphi dx$$

Lemme 1.2.8 *Soit $\mathcal{U} = B^*$, avec un espace de Banach et soit (u_k) une suite dans $\mathcal{U}$. Alors, il existe une sous-suite (u_{kl}) converge faiblement $*$ ie.*

$$\langle v, u_{kl}\rangle \rightharpoonup *\langle v, \tilde{u}\rangle, \quad \forall v \in \mathcal{U}$$

pour $u \in \mathcal{U}$.

1.3 Régularisation

La non-existence de solution est un effet indésirable dans les problèmes d'optimisation en dimension infinie, en particulier si la fonction objectif concerne un domaine et que l'on ne contrôle pas le coût du domaine.

1.3.1 Non-existence de solution pour l'équation de la chaleur

Considèrons par exemple le problème de contrôle optimal de l'équation de la chaleur pour $\Omega = (0,1)$. Dans ce cas, nous voulons trouver un domaine optimal $u \in L^2(0,T)$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta u & = & 0 & dans & (0,1)\times(0,T) \\ v & = & v_0 & dans & (0,1)\times(0,T) \\ v & = & u & en & \{0\}\times(0,T) \\ \frac{\partial v}{\partial x} & = & 0 & en & \{1\}\times(0,T) \end{array}\right.$$

qui minimise

$$J(v) = \int_0^1 |v(x,t) - \theta(x)|^2 dx$$

Si $J(u) \leq M$, une application de l'inégalité triangulaire montre que

$$\int_0^1 |v(x,T|^2 dx \leq \left(M + \sqrt{\int_0^1 \theta(x) dx} \right)^2$$

et donc $v(x,T)$ est bornée dans $L^2(0,1)$. Donc nous savons que v est solution de l'équation de la chaleur avec une valeur initiale $v(.,0)$ bornée, une valeur finale $v(.,T)$ bornée et une dérivée à droite du point $(1,.)$ bornée. Or du fait que le problème ce Cauchy parabolique avec une donnée initiale, une donnée finale et une valeur spatiale sur une partie du bord est un problème mal posé, le contrôle $u = v(.,0)$ ne peut pas être borné dans $L^2(0,1)$. Donc nous ne pouvons pas obtenir une compacité pour la topologie faible et par conséquent, la solution du problème ne peut exister. La situation est différente lorqu'on ajoute le coût du contrôle u, donné par

$$R(u) = \int_0^T (u(t))^2 dx = \|u\|^2.$$

Nous trouvons une solution à coût limité de deux manière, plus facilement en restreignant la classe des contrôles admissible à ceux satisfaisant

$$R(u) \leq M.$$

pour $M >$, ou en pénalisant le problème originel en posant

$$J_\beta(u) = J(u) + \beta R(u)$$

comme fonctionnelle à minimiser, pour un $\beta > 0$. Dans tous les cas les lignes de niveau de la fonctionnelle $J_\beta(u)$ est compact pour la topologie faible de $L^2(\Omega)$ et comme $J(u)$ et $R(u)$ sont tous deux semi-continue inférieurement, nous obtenons l'existence d'un minimiseur. Un autre fait important est la "robustesse du contrôle" i.e. la stabilité de la solution (si elle existe) tout en respectant l'objectif final (respect de l'atteinte de la température fixée dans notre exemple). Une différence majeur avec les problèmes en dimension finie est qu'ici une petite perturbation de la fonction objectif (ou de la température finale dans notre cas) peut entrainer une grande différence entre les solutions du problème d'optimisation (même si elle existent). Dans tous les cas, la non-existence et l'instabilité, on a besoin de régulariser i.e. remplacer le problème mal posé par un problème approché stable. Une technique standard pour obtenir un problème régularisé est d'ajouter une fonctionnelle R semi-continue inférieurement, comme une pénalisation du problème originel et résoudre

$$\min_{u \in \mathcal{U}} J_\beta(u) := J(u) + \beta R(U)$$

avec $\beta > 0$, un paramétre de régularisation. Si toutes les ligne de niveau de R sont compactes, alors, J_β a une ligne de niveau compacte et non vide pour chaque β, et comme :

$$J_\beta(u) \leq M \quad implique \quad R(u) \leq \frac{M - \inf J}{\beta}.$$

Et donc la fonctionnelle J_β admet un minimiseur pour tout $\beta > 0$. Pour la fonctionnelle régularisée, nous pouvons aussi obtenir un résultat de stabilité, fonction de la perturbation de fonctionnelle J.

Soit J_k une suite de fonctionnelles semi-continue inférieurement, convergente uniformément des J sur des sous ensembles compactes de $\mathcal{U}$. (C'est le cas pour les fonctionnelles

$$J_k := \int |v(x,T) - \theta_k|^2 dx$$

où θ_k sont des perturbations de l'objectif qui convergent vers θ lotrsque $k \longrightarrow +\infty$). De plus soit u_k est un minimiseur global de $J_\beta + \beta R$. Alors (u_k) admet une sous-suite convergente (u_{kl}), et la limite de toute sous-suite convergente de (u_k) est un minimiseur de $J_\beta + \beta R$.

En effet, sans nuire à généralité, supposons que $J(u) \geqslant 0$ et $J_k(u) \geq 0$ pour tout $u \in \mathcal{U}$. Alors pour tout k, on obtient

$$J_k(u_k) + \beta R(u_k) \leqslant J_k(\tilde{u}) + \beta R(\tilde{u}); \tag{1.3}$$

où $\tilde{u}$ est un minimiseur global de $J + \beta R$. Comme $J_k(\tilde{u}) \to J(\tilde{u})$, il existe une suite ϵ_k de nombres réels positifs tels que $J_k(u_k) + \beta R(u_k) \leqslant J_k(\tilde{u}) + \beta R(\tilde{u}) + \epsilon_k$ et $\epsilon_k \to 0$. Donc, il existe un nombre positif M tel que

$$M \leqslant J(\tilde{u}) + \beta R(\tilde{u}) + \epsilon_k$$

et d'après (1.3)

$$R(u_k) \leq \frac{M}{\beta}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

En conséquence, la suite (u_k) est contenue dans un ensemble compact, d'après les propriétés de R, ce qui implique l'existence de sous-suites convergentes. Si u_{kl} est une sous-suite convergente, alors d'après (1.3) et la convergence uniforme de J_k sur les ensembles compacts, on obtient à la limite $\tilde{u}$

$$\begin{aligned}
J_k(\tilde{u}) + \beta R(\tilde{u}) &\leqslant \lim_{l\to\infty} (J_{kl}(u_{kl}) + \beta R(u_{kl})) \\
&\leqslant \lim_{l\to\infty} (J_{kl}(\tilde{u}) + \beta R(\tilde{u})) \\
&\leqslant \lim_{l\to\infty} (J(\tilde{u}) + \beta R(\tilde{u}) + \epsilon_{kl}) \\
&= J(\tilde{u}) + \beta R(\tilde{u}) \\
&= \inf_u (J(u) + \beta R(u).
\end{aligned}$$

et donc $\tilde{u}$ est un minimiseur de $J + \beta R$.

En utilisant une technique similaire, nous pouvons étudier la limite lorsque $\beta \to 0$ Si le problème limite $\min_{u \in \mathcal{U}} J(u)$ admet un minimiseur global u_0, alors le minimiseur global u_β de $J + \beta R$ satisfait

$$\begin{aligned} \beta R(u_\beta) &\leqslant J(u_\beta) - J(u_0) + \beta R(u_\beta) \\ &\leqslant \beta R(u_0). \end{aligned}$$

Et donc $R(u_\beta) \leqslant R(u_0)$ pour chaque $\beta > 0$. Par compacite, on en déduit l'existence d'une sous-suite convergente (u_{β_k}) la limite de chaque sous-suite convergente est un minimiseur global de J.

Inversement, s'il n'existe pas de minimiseur global de J, alors $R(u_{\beta_k})$ ne peut être bornée pour aucune sous-suite (u_{β_k}), comme d'autre part, on veut obtenir un minimiseur de J à la limite $\beta_k \longrightarrow 0$. Donc, si le problème limite admet un minimiseur, il vient que

$$R(u_\beta) \longrightarrow +\infty. \quad lorsque \;\; \beta \longrightarrow +\infty.$$

C'est-à-dire que l'on peut décrire le comportement asymptotique de $R(u_\beta)$ que le problème limite admet un minimiseur global ou pas.

Remarque 1.3.1 *1. Il faut noter que ces résultats ne sont vraies que pour les minima globaux, ils sont générals faux pour les minima locaux, ce-ci peut être aussi vérifé même en dimension finie.*
2. Un choix de fonctionnelle de régularisation dans les espaces de Hilbert est $R(u) = \|u\|^2$ *qui satisfait les conditions de compacité ci-dessus pour la topologie faible.*

1.3.2 Non-existence de forme optimale

Nous allons donner ici un contre-exemple où il n'existe pas de un domaine optimal régulier. Il a été suggéré par G. Buttazzo, un exemple similaire a été décrit par G. Allaire et A. Henrot dans [2]. Soit D un domaine fixe, pour tout domaine ouvert $\omega \subset D$, nous résolvont le problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} -\Delta u_\omega &= f \quad dans \quad \omega \\ \quad u_\omega &= 0 \quad dans \quad D \setminus \omega \end{cases}$$

Nous voulons minimiser la fonctionnelle

$$J(\omega) = \int_D (u_\omega - u_0)^2 dx$$

où u_0 est une fonction donnée dans $L^2(D)$. Une interpretation physique de ce problème peut être le suivant : D est une chambre contenant une source de chaleur f et $D \setminus \omega$ est une place pleine de glace. Nous voulons trouver la localisation de la zone froide pour approcher le mieux une température u_0. Nous allons considérer une configuration simple pour montrer qu'en général, ce problème n'admet pas de solution. On choisit $f = 1$ $u_0 = c$,

c est une constante et D la boule ouverte de $\mathbb{R}^2$.
D'après le principe du maximum, pour chaque ouvert $\omega \subset D$, $0 < u_\omega < u_D = \frac{1-r^2}{4} \leq \frac{1}{4}$ par conséquant lorsque $c \geq \frac{1}{4}$ nous avons $u_\omega - c \leq u_D - c \leq 0$ et donc

$$J(\Omega) = \int_D (u_\omega - c)^2 dx \geq \int_D (u_D - c)^2 dx = J(D)$$

ce qui prouve que $\omega = D$ réalise le minimum de J. Nous allons prouver par contradiction que J ne peut pas avoir un minimum régulier. Supposons que Ω soit ce minimum, soit B_ε une petite boule de rayon ε inclue dans $D \setminus \overline{\Omega}$. Nous introduisons $\Omega_\varepsilon = \Omega \cup B_\varepsilon$ et nous allons prouver que pour ε assez-petit, Ω_ε est "meilleure" que Ω. Comme Ω_ε admet deux composantes connexes, la solution u_{Ω_ε} peut être calculée séparément sur chaque composante. Maintenant, dans Ω, nous avons abusivement $u_\Omega = u_{\Omega_\varepsilon}$. Mais dans B_ε, u_{Ω_ε} peut être calculée explicitement (il est à symétrie radiale). En particulier, on voit facilement que pour ε assez petit, $0 < u_{\Omega_\varepsilon} < c$ dans B_ε. Nous allons maintenant comparer $J(\Omega_\varepsilon)$ à $J(\Omega)$. Nous avons

$$\begin{aligned} J(\Omega_\varepsilon) &= \int_{\Omega_\varepsilon} (u_{\Omega_\varepsilon} - c)^2 dx + \int_{D\setminus\Omega_\varepsilon} c^2 dx \\ &= \int_\Omega (u_\Omega - c)^2 dx + \int_{B_\varepsilon} (u_{\Omega_\varepsilon} - c)^2 dx + \int_{D\setminus\Omega} c^2 dx - \int_{B_\varepsilon} c^2 dx \\ &= J(\Omega) + \int_{B_\varepsilon} ((u_{\Omega_\varepsilon} - c)^2 - c^2) dx. \end{aligned}$$

Maintenant lorsque $0 < u_{\Omega_\varepsilon} < c$, nous avons $(u_{\Omega_\varepsilon} - c)^2 < c^2$ et donc $J(\Omega_\varepsilon) < J(\Omega)$ donc Ω_ε est meilleur que Ω d'où la contradiction.
On voit que pour avoir une forme optimale, nous sommes obligés d'imposer certaines restrictions à la classe des domaines admissibles. Ces restrictions peuvent être :

- des restrictions de régularité (on travaille avec des domaines vérifiant **la propreté du ε-cône à définir** par exemple)
- en dimension 2, on peut travailler sur **le nombre de composantes connexes des complémentaires à définir**.
- **des restrictions de nature capacitaire à définir**.

1.4 Dérivation

1.4.1 Définition

Les dérivées des fonctions objectifs et des contraintes sont nécessaires pour plusieurs raisons : Premièrement, on a besoin des dérivées pour en déduire les conditions d'optimalité locales, ensuite, les dérivées apparaissent dans toutes les processus de recherche d'extêma locaux comme dans les méthodes de contrôle des pas et les critères d'arrêt.

Nous commencons avec des dérivées pour des opérateurs non-linéaires dans des espaces de Banach. Soit $F : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$. La dérivée la plus simple que l'on peut définir est la dérivée en fonction de t dans le cas uni-diemensionnel.

$$F_v(t) = F(u + tv)$$

Définition 1.4.1 *Soit F un opérateur non linéaire définie sur des espaces de Banach $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$. Alors la dérivée directionnelle dF au point u dans la direction v est définie comme la limite, si elle existe, du rapport :*

$$dF(u; v) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t} = F'_v(t)|_{t=0}$$

Si la dérivée directionnelle existe dans toute les direction $v \in \mathcal{U}$, alors l'opérateur F est dit Gateâux-différentiable en u et on note $dF(u, .)$ (aussi appelée dérivée au sens de Gateâux.

Si de plus l'application $dF(u; .) : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ est un opérateur linéaire et continue, alors F est dit différentiable au sens de Frechet avec comme dérivée au sens de Frechet :

$$F'(u).v = dF(u, v), \quad \forall v \in \mathcal{U}.$$

Pour des fonctions obhectifs, i.e des opérateurs non-linéaires $J : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$, la dérivée de Frechet $J'(u)$, si elle existe, est une forme linéaire continue. Donc dans le cas échéant, $J'(u)$, peut être identifiée avec un élément du dual $\mathcal{U}^*$. Pour un espace de Hilbert $\mathcal{U}$, $J'(u)$ peut être identifiée avec un élément de $\mathcal{U}$ d'après la dualité standard.

De facon inductive, nous pouvons déduire des dérivées d'ordre supérieur. En particulier, la dérivée seconde au sens de Frechet d'un opérateur, si elle existe, est donnée par la forme bilinéaire définie par :

$$F''(u)(v, w) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{F'(u + tw)v - F'(u)v}{t}$$

Dans le paragraphe suivant, nous donnons quelques exemples de calcul de dérivées.

1.4.2 Exemples

Surfaces minimales

Nous commenccons par calculer la dérivée de la fonctionnelle

$$J(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx$$

à minimiser par le graphe de la surface minimale. Cette fonctionnelle peut être définie dans l'espace de Banach $\mathcal{U} = BV(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{BV(\Omega)} = \|u\|_{L_1(\Omega)} + |u|_{BV(\Omega)} \quad avec \quad |u|_{BV(\Omega)} := \sup_{g \in C_0^\infty(\Omega)} \int_\Omega u.divg dx$$

Lorsque u est suffisamment régulier, alors,

$$|u|_{BV(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla u| dx.$$

La variation de J dans la direction v est donnée par : On rappelle que

$$(\sqrt{I})' = \frac{I'}{2\sqrt{I}} \quad \textit{Soit :} \quad I(u) = 1 + |\nabla u|^2$$

$$\begin{array}{rcl} I(u+tv) & = & 1 + |\nabla u + t\nabla v|^2 \\ & = & 1 + |\nabla u|^2 + 2t\nabla u \nabla v + t^2 |\nabla v|^2. \\ \dfrac{I(u+tv) - I(u)}{t} & = & \dfrac{1}{t}\left[1 + |\nabla u + t\nabla v|^2 - 1 + |\nabla u|^2\right] \\ & = & \dfrac{1}{t}\left[1 + |\nabla u|^2 + 2t\nabla u \nabla v + t^2 |\nabla v|^2 - 1 + |\nabla u|^2\right]. \end{array}$$

Lorsque $u \in C_0^\infty(\Omega)$, nous pouvons calculer la limite lorsque $t \longrightarrow 0$ et l'on obtient :

$$\langle I'(u), v\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{I(u+tv) - I(u)}{t} = 2\langle \nabla u, \nabla v\rangle.$$

Ce qui donne :

$$\begin{array}{rcl} J'(u)v & = & \displaystyle\int_\Omega \frac{\nabla u \nabla v}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} dx \;\; (par\ la\ formule\ de\ Green), \\ & = & \displaystyle -\int_\Omega v\, div \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right).dx \end{array}$$

$J'(u)$ est un opérateur linéaire et continu sur $BV(\Omega)$ pour $u \in C_0^2$ et non pour $u \in BV(\Omega)$ quelconque. Donc, la dérivée de Frechet n'existe que sur un sous-espace dense.

Contrôle fontière

Notre deuxime exemple est inspiré par l'exemple sur le contrôle frontière introduit dans le chapitre précedent. Pour simplifier le problème, nous nous restreignont au cas unidimentionnel $\Omega = (0, 1)$. La dérivée de la fonction régularisée

$$J(u, v) = \int_0^1 |v(x, T) - \theta(x)|^2 dx + \beta \int_0^T u(t)^2 dt.$$

est donnée par

$$\begin{aligned}
J'(u,v,T)(h,g) &= \lim_{s\searrow 0} \frac{J(v(x,T)+sh(x,T),u(t)+sg(t))-J(v(x,T),u(t))}{s} \\
&= \lim_{s\downarrow 0} \frac{1}{s}\left[\int_0^1 |v(x,T)+sh(x,T)-\theta(x)|^2dx - \int_0^1 |v(x,T)-\theta(x)|^2dx \right.\\
&+ \left. \beta\int_0^T (u(t)+sg(t))^2dt - \beta\int_0^T u(t)^2dt\right] \\
&= \lim_{s\downarrow 0} \frac{1}{s}\left[\int_0^1 |v(x,T)-\theta(x)|^2dx + 2s\int_0^1 (v(x,T)-\theta(x))h(x,T)dx \right.\\
&+ \int_0^1 s^2h(x,T)^2dx - \int_0^1 |v(x,T)-\theta(x)|^2dx \\
&+ \left. \beta\int_0^T u(t)^2dt + \beta s\int_0^T u(t)g(t)dt + \beta s^2\int_0^T sg(t)^2dt - \beta\int_0^T u(t)^2dt\right] \\
&= \lim_{s\downarrow 0}\left[2\int_0^1 (u(x,T)-\theta(x))h(x,T)dx + 2\beta\int_0^T u(t)g(t)dx \right.\\
&+ \left. s\int_0^1 h(x,T)^2dx + \beta s\int_0^T g(t)^2dt\right].
\end{aligned}$$

Comme $\int_0^1 h(x,T)^2dx$ et $\int_0^T g(t)^2dt$ sont bornée pour $h \in C(0,T;L^2(\Omega))$ et $g \in L^2(0,T)$, les derniers termes tendent vers 0, et donc

$$J'(u,v,T)(h,g) = 2\int_0^1 (u(x,T)-\theta(x))h(x,T)dx + 2\beta\int_0^T u(t)g(t)dx$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Swartz, nous pouvons vérifer que $J'(u,v)(.,.)$ est un opérateur linéaire et borné.

Les dérivées des équations des contraintes peuvent être également calculées par l'introduction de l'opérateur

$$e:(u,v)\longmapsto \begin{pmatrix} v_t - v_{xx} \\ v(.,0)-v_0 \\ v(0,.)-u \\ v_x(1,.) \end{pmatrix}$$

Les dérivées des équations des contraintes peuvent être écrites lorsque $e(u,v)=0$. Comme e est linéaire et affine, ces dérivées sont données par

$$e'(u,v)(g,h) = e(g,h) - e(0,0) = \begin{pmatrix} h_t - h_{xx} \\ h(.,0) \\ h(0,.)-g \\ h_x(1,.) \end{pmatrix}.$$

1.5 Conditions d'optimalité

Dans la suite, nous cherchons à déduire des conditions nécessaires et des conditions suffisantes pour prouver l'existence de minima locaux à partir des dérivées.

1.5.1 Problèmes sans contraintes

Nous commencons notre analyse avec un problème sans contraintes. Nous considérons

$$\min_{u \in \mathcal{U}} J(u)$$

où J est continûment différentiable au sens de Frechet sur $\mathcal{U}$. Sous cette condition, nous avons la condition nécessaire du premier ordre suivante.

Proposition 1.5.1 *Soit J une fonctionnelle Frechet différentiable et soit $\overline{u}$ un minimiseur local. Alors $J'(\overline{u}) = 0$.*

Preuve. Comme $\overline{u}$ est un minimiseur local, alors l'inégalité

$$J(\overline{u} + tv) - J(\overline{u}) \geq 0$$

pour tout $v \in \mathcal{U}$ et $t \in \mathbb{R}^+$ suffisament petit. Nous obtenons alors

$$J'(\overline{u}) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{J(\overline{u} + tv) - J(\overline{u})}{t} \geq 0$$

pour tout $v \in \mathcal{U}$. Comme $J'(\overline{u})$ est une fonctionnelle linéaire, nous obtenons

$$0 \leq J'(\overline{u})(-v) = -J'(\overline{u}) \leq 0$$

et donc $J'(\overline{u}) = 0$, pour tout $v \in \mathcal{U}$. ■

Remarque 1.5.2 • *La dernière étape de la preuve prćedente ne peut pas être vérifiée lorsque J est seulement Gateâux dérivable en $\overline{u}$. Dans ce cas, nous avons seulement $dJ(\overline{u}; v) \geq 0$ pour tout $v \in \mathcal{U}$.*

• *Evidemment, la condition d'optimalité nécessaire précedente ne caractérise pas un minimiseur local en général. En particulier, tout minimiseur local satisfait cette condition. Pour déduire une condition suffisante d'optimalité, nous avons besoin des dérivées secondes de la fonction objectif. L'idée générale de la condition d'optimalité suffisante du second ordre est la convexité locale autour de $\overline{u}$ implique que $\overline{u}$ est un minimiseur local.*

Proposition 1.5.3 *Supposons que J est deux fois Frechet différentiable et $\overline{u}$ un point stationnaire de J (i.e. $J'(\overline{u}) = 0$). Si $J''(\overline{u})$ est une forme bilinéaire définie positive i.e.*

$$J''(\overline{u})(v, v) \geq \alpha \|v\|^2$$

pour tout $v \in \mathcal{U}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^+$ indépendant de v. Alors $\overline{u}$ est un minimiseur local de J.

Preuve. Comme J est deux fois continûement différentiable au sens de Fréchet. Le développement de Taylor de J s'écrit :

$$J(v) = J(\overline{u}) + J'(\overline{u})(v - \overline{u}) + \frac{1}{2}J''(\overline{u})(v - \overline{u})(v - \overline{u}) + o(\|v - \overline{u}\|^2)$$

pour tout $v \in \mathcal{V}$ voisinage de $\overline{u}$. En particulier, il existe $\epsilon > 0$, tel que

$$J(v) \geq J(\overline{u}) + J'(\overline{u})(v - \overline{u}) + \frac{1}{2}J''(\overline{u})(v - \overline{u})(v - \overline{u}) + \frac{\alpha}{4}(\|v - \overline{u}\|^2$$

lorsque $\|v - \overline{u}\| < \epsilon$.
Comme $J'(\overline{u}) \geq 0$, et la positivité de $J''(\overline{u})$, on obtient

$$J(v) \geq J(\overline{u}) + \frac{\alpha}{4}\|v - \overline{u}\|^2$$

pour $\|v - \overline{u}\| < \epsilon$, et en particulier,

$$J(v) > J(\overline{u})$$

Ce qui prove que $\overline{u}$ est un minimiseur local de J. ■

1.5.2 Problèmes avec contraintes

Dans ce paragraphe, nous cherchons les conditions d'optimalité pour les problèmes d'optimisation avec contraintes. Nous considèrons

$$\min_{u \in \mathcal{U}} J(u)$$

sous la contrainte $u \in \mathcal{C}$.
Obtenir des conditions d'optimalité pour $\mathcal{C}$ quelconque est impossible, d'autant plus que $\mathcal{C}$ peut contenir des points isolés, qui sont toujours des minima locaux. Donc nous allons nous restreindre aux cas particuliers où l'ensemble $\mathcal{C}$ est convexes ou est défini par des contraintes d'inégalités. Lorsque $\mathcal{C}$ est fermé, on peut formuler les conditions d'optimalité locales en termes de cône tangent, qui consiste en toutes les directions tangentes à $\partial\mathcal{C}$ au point u pointant à l'extérieur de $\mathcal{C}$.

Définition 1.5.4 *Soit $\mathcal{C}$ un ensemble fermé. Pour $u \in \mathcal{C}$, le cône tangent à $\mathcal{C}$ en u, noté $T_{\mathcal{C}}(u)$ est définie par*

$$T_{\mathcal{C}}(u) = \{v \in \mathcal{U} \mid \exists\, \epsilon > 0,\ \forall\, 0 \leq t \leq \epsilon,\ \ \exists\, w(t) \in \mathcal{C} :\ \|u + tv + w(t)\| = o(t)\}$$

Remarque 1.5.5 *1. Pour $u \in \dot{\mathcal{C}}$, le cône tangent est simplement $T_{\mathcal{C}(u)} = \mathcal{U}$, en effet, $w(t) = u + tv \in \mathcal{C}$ pour tout t suffisament petit.*
2. Les condtions d'optimalité du premier ordre pour un problème avec un ensemble de contrainte fermé exprime que pour toute direction tangente, la fonction objectif est localement non décroissante.

Proposition 1.5.6 *Soient $J : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment Fréchet-différentiable, et $\overline{u}$ un minimiseur local de*

$$\min_{v\in\mathcal{C}} J(v)$$

pour un ensemble férmé $\mathcal{C}$. Alors

$$J'(\overline{u})v \geq 0; \quad \forall\, v \in T_{\mathcal{C}}(\overline{u}).$$

Preuve. Soit $v \in T_{\mathcal{C}}(\overline{u})$. Alors pour $t \in [0, \epsilon,]$ on a

$$\begin{aligned} J(w(t)) &= J(\overline{u} + tv) + o((t) &(1.4)\\ &= J(\overline{u}) + tJ'(\overline{u})v + o(t). &(1.5)\end{aligned}$$

Supposons que $J'(\overline{u})v < 0$ alors pout t suffisament petit, on a

$$J(w(t)) \leq J(\overline{u}) + tJ'(\overline{u})v + \frac{1}{2}J''(\overline{u})v < J(\overline{u}),$$

Ce qui contredit le fait que $\overline{u}$ est un minimiseur. Donc, $J'(\overline{u})v \geq 0,\ \forall\, v \in T_{\mathcal{C}}(\overline{u})$. ∎

Pour obtenir les conditions d'optimalité du second ordre, nous avons besoin de la convexité de $\mathcal{C}$.

Proposition 1.5.7 *Soient $\mathcal{C}$ un convexe férmé et $J : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment Fréchet-différentiable.*
Si $\overline{u} \in \mathcal{C}$ satisfait

$$J'(\overline{u})v \geq 0; \quad \forall\, v \in T_{\mathcal{C}}(\overline{u})$$

et pour un $\beta > 0$

$$J''(\overline{u})(v, v) \geq \beta\|u\|^2; \quad \forall\, v \in T_{\mathcal{C}}(\overline{u}).$$

Alors $\overline{u}$ est un minimiseur local de J sur $\mathcal{C}$.

Preuve. Soit $w \in \mathcal{C}$ et $\|w - \overline{u}\|$ suffisament petit. Alors d'après la convixité de $\mathcal{C}$, $\overline{u} + tv \in \mathcal{C}$ pour $t \in [0, 1]$, pour $v = \overline{u} + tw$, en particulier, $v \in T_{\mathcal{C}}(\overline{u})$, et donc

$$J(w) \geq J(\overline{u}) + J'(\overline{u})v + \frac{1}{2}J''(\overline{u})(v, v) - \frac{\beta}{4}\|v\|^2$$

pour $\|v\|$ suffisament petit.
Donc,

$$J(w) \geq J(\overline{u}) + \frac{\beta}{4}\|v\|^2 > J(\overline{u}),$$

pout tout $w \in \mathcal{C}$ avec $\|w - \overline{u}\|$ suffisament petit, ce qui implique que $\overline{u}$ est un minimiseur de J sur $\mathcal{C}$. ∎

Une méthode alternative consiste à utiliser les multiplicateurs de Lagrange. Dans la suite, nous considèrons $E : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ et $I : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{W}$, où $\mathcal{V}$ est un espace de Banach, et

$\mathcal{W}$ un espace de Banach ordonné, muni de la relation d'ordre $\preceq$.
Nous considérons le problème

$$\min_{u\in\mathcal{U}} J(u)$$

sous sontraintes

$$\begin{array}{rcl} E(u) & = & 0 \\ I(u) & \preceq & 0 \end{array}$$

correspondant aux contraintes d'égalité sur $\mathcal{V}$ et aux contraintes d'inégalités sur $\mathcal{W}$. Nous introduisont les multiplicateurs de Lagrange $p \in \mathcal{V}^*$ et $q \in \mathcal{W}^*$ et la fonctionnelle de Lagrange

$$\mathcal{L}(u; p, q) = J(u) + \langle p, E(u)\rangle + \langle q, I(u)\rangle.$$

Nous considérons "le problème dual", c'est à dire celui de la maximisation de $\mathcal{L}$ en fonction de p et q.
Supposons d'abors que $E(u) = 0$. Alors $\langle p, E(u)\rangle = 0$ pour tout p, et donc

$$\sup_{p\in\mathcal{V}^*} \langle p, E(u)\rangle = 0$$

SI $E(u) \neq 0$, alors on peut trouver $p \in \mathcal{V}^*$ tel que

$$\langle p, E(u)\rangle > 0$$

er donc, pout $t \longrightarrow 0$ dans $\mathbb{R}^+$, $p_t := tp$

$$\langle p_t, E(u)\rangle = t\langle p, E(u)\rangle \longrightarrow +\infty.$$

I.e.

$$\sup_{p\in\mathcal{V}^*} \langle p, E(u)\rangle = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & si\ E(u) = 0 \\ +\infty & sinon \end{array} \right.$$

Un raisonnement similaire s'applique à la contrainte d'inégalité, si l'on se restreint aux multiplicateurs de Lagrange positives. Il faut noter que l'ordre naturel de $\mathcal{W}^*$ est donné par

$$q \succeq 0 \Longleftrightarrow \langle q, w\rangle > 0, \quad \forall w \in \mathcal{W}, \ \ w \succeq 0$$

Nous supposons que $q \succeq 0$ et $I(u) \preceq 0$. Alors $\langle q, I(u)\rangle \leq 0$, et donc

$$\sup_{q\in\mathcal{W},\, q\succeq 0} \langle q, I(u)\rangle = 0.$$

Si $\langle \lambda q_0, I(u)\rangle > 0$ pour un certian $q_0 \geq 0$, alors en posant $q_t = tq_0$, $t \in \mathbb{R}^+$ satisfait $\langle q_t, I(u)\rangle = t\langle q_0, I(u)\rangle \longrightarrow +\infty$ lorsque $t \longrightarrow +\infty$, donc

$$\sup_{q\in\mathcal{W},\, q\succeq 0} \langle q, I(u)\rangle = +\infty.$$

En somme, nous sobtenons :

$$\sup_{p\in\mathcal{V}^*,q\in\mathcal{W}^*,\,q\succeq 0} \mathcal{L}(u;p,q) = \begin{cases} 0 \; si \; E(u)=0 \, et \; I(u) \preceq 0 \\ \quad +\infty \quad sinon \end{cases}$$

Et comme conséquence directe, on peut conclure que

$$\inf_{u\in\mathcal{U},E(u)=0,I(u)\preceq 0} J(u) = \inf_{u\in\mathcal{U}} \sup_{p\in\mathcal{V}^*,q\in\mathcal{W}^*,\,q\succeq 0} \mathcal{L}(u;p,q).$$

Si le inf et le sup sont atteints, on peut appliquer les conditions d'optimalités locales du premier ordre pour un problème sans contraintes et déduire

$$\begin{cases} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}(\overline{u},\overline{p},\overline{q}) = 0 \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial p}(\overline{u},\overline{p},\overline{q}) = 0 \end{cases}$$

en un minimum local de J. De plus, nous pouvons appliquer la condition précedente de cône tangent pour un problème avec contraintes

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}(\overline{u},\overline{p},\overline{q})q \leq 0$$

pour tout q satisfaisant

$$\langle q,w\rangle \geq 0, \quad , \quad \langle\overline{q},w\rangle = 0.$$

La principale difficulté pour un problème d'optimisation avec contraintes en dimension infinie est, contrairement en dimension finie, que le sup en p et q n'est pas atteint et dans ce cas, la condition d'optimalité locale n'est pas valable. Pour obtenir l'existence des multiplicateurs de Lagrange du problème, nous allons invistiguer la condition d'optimalité

$$0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}(\overline{u},\overline{p},\overline{q})v = J'(u)v + \langle p, E'(u)v\rangle + \langle q, I'(u)v\rangle$$

Pour simplifier, nous commencons avec uniquement un contrainte de type égalité i.e.

$$0 = J'(u)v + \langle p, E'(\overline{u})v\rangle \;\; \forall\, v \in \mathcal{U}.$$

Cette condition est équivalente à

$$J'(\overline{u}) + E'(\overline{u})^* p = 0$$

qui peut être interpréter comme une équation en p. L'existence de solution pour cette équation linéaire est garantie si $E'(\overline{u})^* : \mathcal{V}^* \longrightarrow \mathcal{U}^*$ est un opérateur linéaire, borné et surjectif. Si nous avons en plus une inégalité, alors la condition d'optimalité devient :

$$J'(\overline{u}) + E'(\overline{u})^* p + I'(\overline{u})^* q = 0$$

et nous povons trouver des multiplicateurs de Lagrange p et $q \succeq 0$ si l'opérateur :

$$\begin{pmatrix} E'(\overline{u})^* \\ I'(\overline{u})^* \end{pmatrix} : \mathcal{V}^* \times \{q\in\mathcal{W}^* | q \succeq 0\} \longrightarrow \mathcal{U}^*$$

est surjectif.

Le système de conditions d'optimalité pour $(\overline{u},\overline{p},\overline{q})$, souvent appelé système de Karush-Khun-Kuker est résumé par le résultat suivant.

Proposition 1.5.8 *Soit* $(\overline{u}, \overline{p}, \overline{q})$ *une solution locale de*

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \max_{p \in \mathcal{V}^*,\, q \in \mathcal{W}^*,\, q \succeq 0} \mathcal{L}(u, p, q)$$

alors $(\overline{u}, \overline{p}, \overline{q})$ *satisfait*

$$\begin{aligned} J'(\overline{u}) + E'(\overline{u})^* p + I'(\overline{u})^* q &= 0 \\ E(\overline{u}) &= 0 \\ I(\overline{u}) &\preceq 0 \\ q &\succeq 0 \end{aligned}$$

De plus $\overline{u}$ *et* $\overline{q}$ *satisfont* $\langle \overline{q}, I'(\overline{u}) \rangle = 0$, *appelée condition complémentaire.*

Pour obtenir des conditions suffisantes d'optimalité du second ordre, nous pouvons utiliser la dérivée second de la fonctionnelle de Lagrange. Notons que les dérivées secondes par rapport à p et q sont nulles. i.e.

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(u, p, q)}{\partial p^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}(u, p, q)}{\partial q^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}(u, p, q)}{\partial p \partial q} = 0$$

et les déivées secondes mixtes

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(u, p, q)}{\partial u \partial p} = E'(u); \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}(u, p, q)}{\partial u \partial q} = I'(u)$$

sont la linéarisation des contraintes. La partie importante des dérivées secondes est celle par rapport à u.

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(u, p, q)}{\partial u^2} = J''(u)(.,.) + \langle E''(u)(.,.), p \rangle + \langle I''(u)(.,.), q \rangle.$$

Proposition 1.5.9 *Soit* $\overline{u}$ *un minimum local de* $\min_{u \in \mathcal{U}} J(u)$ *sous les contraintes* $E(u) = 0$ *et* $I(u) \leq 0$ *Soit* $(\overline{p}, \overline{q})$ *les multiplicateurs de Lagrange, tels que les conditions KKT soient vérifiées en* $(\overline{u}, \overline{p}, \overline{q})$, *et si*

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\overline{u}, \overline{p}, \overline{q})(v, v)}{\partial u^2} \geq \alpha \|v\|^2$$

pour un $\alpha \in \mathbb{R}^+$, *pout tout* $u \in \mathcal{U}$. *Alors* $\overline{u}$ *est un minimum global de*

$$\min_{s/c \begin{cases} E'u) = 0 \\ I(u) \preceq 0 \end{cases}} J(u).$$

Preuve. Soit $w \in \mathcal{U}$ avec $E(w) = 0$, $I(w) \preceq 0$ et $\|w - \overline{u}\|$ suffisament petit. Alors

$$J(w) = J(\overline{u} + J((\overline{u})v + \frac{1}{2} J''(\overline{u})(w - \overline{u}, w - \overline{u}) + o(\|w - \overline{u}\|^2).$$

D'après les conditions KKT, on a

$$-J'(\overline{u})(w-\overline{u}) = \langle E'(\overline{u}),(w-\overline{u}),\overline{p}\rangle + \langle I'(\overline{u}),(w-\overline{u}),\overline{q}\rangle$$

Donc

$$\begin{aligned} J(w) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{L}(\overline{u},\overline{p},\overline{q})}{\partial u^2}(w-\overline{u}),w-\overline{u}) \\ &+ \left\langle E'(\overline{u})(w-\overline{u}) + \frac{1}{2}E''(\overline{u})(w-\overline{u}),(w-\overline{u}),\overline{p}\right\rangle \\ &+ \left\langle I'(\overline{u})(w-\overline{u}) + \frac{1}{2}I''(\overline{u})(w-\overline{u}),(w-\overline{u}),\overline{q}\right\rangle \\ &+ o(\|w-\overline{u}\|^2). \end{aligned}$$

Comme $E(\overline{u}) = 0$ et $\langle I(\overline{u}),\overline{q}\rangle = 0$, on obtient

$$E'(\overline{u})(w-\overline{u}) + \frac{1}{2}E''(\overline{u})(w-\overline{u}),(w-\overline{u}) = o(\|w-\overline{u}\|^2).$$

et

$$\langle I'(\overline{u})(w-\overline{u}) + \frac{1}{2}I''(\overline{u})(w-\overline{u}),(w-\overline{u}),\overline{q}\rangle = o(\|w-\overline{u}\|^2).$$

En inserant ces deux égalités dans l'expression précedente de $J(w)$, on obtient

$$J(w) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{L}(\overline{u},\overline{p},\overline{q})}{\partial u^2}(w-\overline{u},w-\overline{u}) + o(\|w-\overline{u}\|^2).$$

ce qui implique que

$$J(w) \geq J(\overline{u})$$

pour $w \neq \overline{u}$ et $\|w-\overline{u}\|$ suffisament petit. ■

1.6 Applications

Dans ce paragraphe, nous donnons quelques applications des rsultats ci-dessus aux exemples du chapitre 9.

1.6.1 Contrôle frontière

On considère le problème de contrôle frontière unidimensionnel ;

$$J(u) = \int_0^1 (v(x,T)-\theta(x))^2 dx + \alpha \int_0^1 u(t)^2 dt$$

sous contraintes

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v & = & 0 & dans & (0,1)\times(0,T) \\ v & = & v_0 & dans & (0,1)\times(0,T) \\ v & = & u & en & \{0\}\times(0,T) \\ \frac{\partial v}{\partial x} & = & 0 & en & \{1\}\times(0,T) \end{array} \right.$$

Comme nous l'avons vu, l'existence et l'unicité de solution $v \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$, $u \in L^2(0,T)$ sont assuées dès que $\alpha > 0$. Nous pouvons maintenant calculer la dérivée de la fonctionnelle

$$\tilde{J}(u) = J(u, v(u)),$$

en utilisant le théorème des fonctions implicite, i.e.

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v & = & 0 & dans & (0,1)\times(0,T) \\ v & = & v_0 & dans & (0,1)\times(0,T) \\ v & = & u & en & \{0\}\times(0,T) \\ \frac{\partial v}{\partial x} & = & 0 & en & \{1\}\times(0,T) \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} \tilde{J}'(u)w &= \frac{\partial J}{\partial u}(u, v(u)).w + \frac{\partial J}{\partial v}(u, v(u))v'(u)w \\ &= 2\alpha \int uwdt + 2\int (u(x,T) - \theta(x))v'(x,T)dx. \end{aligned}$$

La dérivée $v' = v'(u)w$ peut être calculée en utilisant la contrainte $E(u, v(u)) = 0$ comme

$$dE(u, v(u)) = \frac{\partial E}{\partial u}(u, v(u)) + \frac{\partial E}{\partial v}(u, v(u))v'(u) = 0$$

on a

$$\frac{\partial E}{\partial v}(u, v(u))v' = -\frac{\partial E}{\partial u}(u, v(u)).$$

Pour l'équation de la chaleur, comme une contrainte d'égalité, ce qui implique que v' est solution de

$$\left\{\begin{array}{ccccc} v'_t - v'_{xx} & = & 0 & dans & (0,1)\times(0,T) \\ v' & = & 0 & dans & (0,1)\times(0,T) \\ v' & = & w & en & \{0\}\times(0,T) \\ v'_x & = & 0 & en & \{1\}\times(0,T) \end{array}\right.$$

Et donc le calcul de chaque dérivée directionnelle requiert le résolution de l'équation aux limites de la chaleur. Donc le calcul du gradient $\tilde{J}'(u)$ nécessite la solution d'un problème aux limites pour toute variation w.

Comme nous allons le voir dans la suite (et de manière générale pour des problèmes avec des contraintes d'EDP), il existe une méthode plus efficace de calcul du gradient $\tilde{J}'(u)$, appelée **méthode adjointe**. L'idée principale de cette méthode est d'introduire une équation dite **équation adjointe** (relativement à $E'(u)^*$), dans ce cas, une fonction $\varphi : (0,1)\times(0,T) \longrightarrow \mathbb{R}$ solution de

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \varphi'_t - \varphi'_{xx} & = & 0 & dans & (0,1)\times(0,T) \\ \varphi' & = & v(.,T) - \theta & dans & (0,1)\times(0,T) \\ \varphi' & = & 0 & en & \{0\}\times(0,T) \\ \varphi'_x & = & 0 & en & \{1\}\times(0,T) \end{array}\right.$$

En intégrant par partie, on peut alors calculer :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (u(x,T)-\theta(x)v'(x,T))dx &= \int_0^1 \varphi(x,T)v'(x,T)dx \\
&= \int_0^1 \varphi(x,0)\underbrace{v'(x,0)}_{=0}dx + \int_0^T\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}(\varphi(x,t)v'(x,t))dxdt \\
&= \int_0^T\int_0^1 (\varphi_t(x,t)v'(x,t)+\varphi(x,t)v'_t(x,t))dxdt \\
&= \int_0^T\int_0^1 (-\varphi_{xx}(x,t)v'(x,t)+\varphi(x,t)v'_{xx}(x,t))dxdt \\
&= \int_0^T\int_0^1 (\varphi_x(x,t)v'_x(x,t)-\varphi_x(x,t)v'_x(x,t))dxdt \\
&+ \int_0^T (-\varphi_x(x,t)v'(x,t)+\varphi(x,t)v'_x(x,t))|_0^1 dt \\
&= \int_0^1 \varphi_x(0,t)w't)dt.
\end{aligned}$$

Et donc la dérivée de $\tilde{J}$ est donnée par

$$\tilde{J}'(u)w = 2\int_0^T (\varphi_x(0,t)+\alpha u(t))w(t)dt.$$

Et donc, nous pouvons identifier la fonctionnelle linéaire $\tilde{J}'(u) : L^2(0,T) \longrightarrow \mathbb{R} = \varphi_x|_{x=0}+\alpha u$. I.e, en utilisant la méthode adjointe, nous pouvons calculer le gradient $\tilde{J}'(u)$ en résolvant un problème parabolique avec des données initiales (**avec un temps en sens inverse**).
Dans ce cas, la condition d'optimalité du premier ordre s'écrit simplement

$$u(t) = -\frac{1}{\alpha}\varphi_x(0,t).$$

Pour tester la condition d'optimalité du second ordre, considèrons encore la formule

$$\tilde{J}'(u)w = 2\int_0^1 \left((v(x,T)-\theta(x))v'(x,T)+\alpha u(x)w(x)\right)\right)dx$$

et nous calculons sa variation en fonction de u. Comme v' est indépendant de u, nous avons $\frac{\partial}{\partial u}(v') \equiv 0$, et donc

$$\begin{aligned}
\tilde{J}''(u)(w,w) &= \left((v'(x,T))^2+\alpha w(x)^2\right)dx \\
&\geq 2\alpha\int_0^1 w(x)^2dx = 2\alpha\|w\|^2.
\end{aligned}$$

En conséquent, chaque point est un minimum local. Nous verrons par la suite que ce problème est strictement convexe, et qu'il existe un seul point stationnaire ($\tilde{J}'(\overline{u})=0$) qui est donc un minimum global.

1.6.2 EDPs elliptiques

Nous considèrons le problème variationel quadratique

$$\min_{u\in\mathcal{U}} J(u) := \int_\Omega \left(\frac{1}{2}(a(x)|\nabla u(x)|^2 + c(x)u(x)^2) - \varphi(x)u(x)\right) dx$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^d$;

$$\mathcal{U} = H_0^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) \mid \nabla u \in L^2(\Omega)^d,\ u_{|\partial\Omega} = 0\right\}.$$

On suppose que $a \in L^\infty(\Omega)$, et $a(x) \geq a_0$, $c(x) \geq 0$ pp sur Ω, pour un certain $a_0 > 0$. Alors $J(u) \leq M$ implique $\int |\nabla u|^2 dx \leq \frac{M}{a_0}$, inégalité à partir de laquelle, on peut déduire la compacité pour la topologie faible de $H_0^1(\Omega)$. De plus, on peut montrer que J est faiblement semi-continue inférieuremet dans $H_0^1(\Omega)$, ce qui implique l'existence de minimiseur. La dérivée de J peut être calculer et donne

$$J'(u)v = \int_\Omega (a\nabla u\nabla v + cuv - \varphi v)dx.$$

et la condition d'optimalité du premier ordre est

$$J'(u)v = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Ce qui implique que le minimiseur de J est la solution faible de l'équation différentielle elliptique

$$\left\{\begin{array}{rcll} -div(a\nabla u) + cu & = & \varphi & dans\ \Omega \\ u & = & 0 & sur\ \partial\Omega \end{array}\right.$$

Remarque 1.6.1 *1. Comme conséquence, nous pouvons obtenir l'existence d'une solution faible pour cette EDP. En utilisant la convexité de J, nous verrons que cette solution faible est unique.*
2. Cet exemple montre que la théorie de l'optimisation en dimension infinie peut être utilisée pour montrer l'existence et l'unicité de solution d'EDP. Cette technique est utilisée en particulier pour des EDP non linéaires.

1.6.3 Problème de Stokes

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine régulier, ouvert et borné et

$$J(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega f u dx,$$

une fonctionnelle à minimiser sur $\mathcal{U} = H_0^1(\Omega)$, sous la contrainte $div(u) = 0$ pp sur Ω. Comme dans le paragraphe précedent, J est faiblement semi-continue inférieurement est compacte sur ses ensembles de niveau. De plus, l'ensemble des contraintes est faiblement fermé sur $H_0^1(\Omega)$. Donc le problème admet un minimum. Pour obtenir les conditions d'optimalité du premier ordre, nous introduisons le lagrangien

$$\begin{aligned}\mathcal{L} : \mathcal{U} = H_0^1(\Omega)^2 \times L^2(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ \mathcal{L}(u;p) = J(u) + \int_\Omega p \, div\, u \, dx.\end{aligned}$$

Une solution de ce problème variationnel satisfait

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u \, \nabla v \, dx + \int_\Omega p \, div \, v \, dx &= \int_\Omega f \, v dx. \\ \int_\Omega p \, div \, u &= 0.\end{aligned}$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)^d, \; p \in L^2(\Omega)$. En appliquant le théorème de Gauss, on montre que le couple (u, p) est une solution faible de

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta u - \nabla p &=& f \quad dans \;\; \Omega \\ div \; u &=& 0 \quad dans \;\; \Omega \end{array}\right.$$

appelé problème de Stokes.

1.6.4 Inégalités variationnelles

Plusieurs problèmes de position d'obstacles et quelques problèmes à frontière libre sont modélisés par des inégalités varriationnelles. Dans le cas le plus simple, considérons la fonctionnelle

$$J(u) := \int_\Omega \left(\frac{1}{2} a |\nabla u|^2 + c u^2 - f u \right) dx$$

sur $H_0^1(\Omega)$, où a et c sont définis comme dans l'exemple sur les EDPs elliptiques. Nous voulons minimiser la fonctionnelle J sous la contraintes $u \in \mathcal{K}$ où $\mathcal{K}$ est un ensemble convexe fermé.

Par le même raisonnement que précedemment, on montre l'existence de minimiseur. En vue d'obtenir les conditions d'optimalité du premier ordre, nous regardont la cône tangent à l'ensembles des contraintes $\mathcal{K}$. Soit $v \in \mathcal{T}_\mathcal{K}(u)$ pour un certain $u \in \mathcal{K}$. Alors pour t suffisamment petit, il existe $w(t) \in \mathcal{K}$ tel que

$$\|w(t) - u - tv\| = o(t) \tag{1.6}$$

En particulier pour $w \in \mathcal{K}$, on a $w(t) := u + t(w - u) \in \mathcal{K}$ et donc $w - u \in \mathcal{T}_\mathcal{K}(u)$.
Les condition d'optimalité du premier odre sont données par

$$J'(u)v \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{T}_\mathcal{K}(u)$$

Ce qui implique en particulier

$$J'(u)(w - u) \geq 0, \quad \forall w \in \mathcal{K} \tag{1.7}$$

Supposons maintenant que (1.7) soit vérifée et soit $v \in \mathcal{T}_{\mathcal{K}}(u)$, avec $w(t) \in \mathcal{K}$ satisfaisant (1.6). Alors

$$J'(u)v = J'(u)\left(\frac{w(t)-u}{t}\right) + \frac{o(t)}{t} \geq \frac{o(t)}{t} \longrightarrow 0.$$

Donc la condition d'optimalité du premier ordre est équivalente à

$$J'(u)(w-u) \geq 0 \quad \forall w \in \mathcal{K}$$

dans ce cas.

Comme exemple simple, considérons le problème de position d'obstacle

$$\mathcal{K} = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid u(x) \geq g(x) \text{ pour tout } x.\}$$

La condition d'optimalité du premier ordre est donnée par

$$\int_\Omega (a\nabla u \nabla(w-u) + cu(w-u) - f(w-u))\, dx \geq 0, \quad \forall w \in \mathcal{K}$$

En supposant u est suffisamment régulière, et on applique le théorème de Gauss, on obtient

$$\int_\Omega ((-div(a\nabla u) + cu - f)(w-u))\, dx \geq 0.$$

Si $u(\overline{x}) - g(\overline{x}) > 0$, en un point $\overline{x} \in \mathbb{R}$, alors nous pouvons trouver des perturbations locales $w = u + h$ et $w = u - h$ avec $h > 0$, $supp(h) \subset B_R(\overline{x})$. Donc

$$\frac{1}{|B_R|}\int_{B_{\mathbb{R}}(\overline{x})} (-div(a\nabla u) + cu - f)hdx \geq 0$$

$$\frac{1}{|B_R|}\int_{B_{\mathbb{R}}(\overline{x})} (-div(a\nabla u) + cu - f)hdx \leq 0$$

Ce qui donne à la limite

$$-div(a\nabla u(\overline{x})) + cu(\overline{x}) - f(\overline{x}) = 0$$

Si $u(\overline{x}) = g(\overline{x})$, on peut trouver des perturbation $w = u + h$, avec $h(\overline{x}) \geq 0$. Et avec la même procédure que précedemment, on peut en déduire

$$-div(a\nabla u(\overline{x})) + cu(\overline{x}) - f(\overline{x}) \geq 0$$

c'est-à-dire une solution de l'inégalité variationnelle

$$\begin{aligned} -div(a\nabla u) + cu - f &\geq 0 \\ u - g &\geq 0 \\ (-div(a\nabla u) + cu - f)(u-g) &\geq 0 \end{aligned}$$

dans Ω.