2019-2020
Pr. A. SY

UNIVERSITÉ ALIOUNE DIOP DE BAMBEY
UFR-SATIC - Départements de Mathématiques
L-3 Statistique et Indormatique Décisionnelle (SID)
Série 1 : Optimisation et d'analyse convexe.

Exercise 1 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *(on pourra se restreindre au cas* $n = 1$ *avec* $\Omega =]0,1[$.*) Soit* $L(p,x,t)$ *une fonction continue sur* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \overline{\Omega}$, *dérivable par rapport à p et t sur cet ensemble, de dérivées partiellles* $\frac{\partial L}{\partial p}$ *et* $\frac{\partial L}{\partial t}$ *lipschitziennes sur cet ensemble. On pose*

$$\mathcal{V} = H_0^1(\Omega) \;\; et \;\; J(v) = \int_\Omega L(\nabla v(x), v(x), x)dx$$

1. Montrer que J *est dérivable sur* $\mathcal{V}$ *et que*

$$\langle J'(u), w\rangle = \int_\Omega \left(\frac{\partial L}{\partial p}(\nabla u(x), u(x), x)\nabla w(x)dx + \frac{\partial L}{\partial t}(\nabla u(x), u(x), x)\nabla w(x)dx \right)$$

2. Si $n = 1$ *et* $\Omega =]0,1[$, *montrer que si* $u \in H_0^1$ *satisfait* $J'(u) = 0$, *alors* u *satisfait*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial p}(u'(x), u(x), x)\right) - \frac{\partial L}{\partial t}(u'(x), u(x), x) = 0$$

presque partout dans l'intervalle $]0,1[$.
3. Si L *ne dépend pas de* x *i.e.* $L = L(p,t)$ *et si* $u \in \mathcal{C}^2(]0,1[)$ *est une solution de l'équation différentielle précedente, montrer que la quantité*

$$L(u'(x), u(x)) - u'(x)\frac{\partial L}{\partial p}(u'(x), u(x))$$

est constante sur l'intervalle $]0,1[$.

Exercise 2 *Soit* $f \in L^2(\Omega)$ *une fonction définie sur un ouvert borné* Ω *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *on considère le problème de régularisation suivant :*

$$\min_{u \in H_0^1(\Omega),\, \|u-f\|_{L^2(\Omega)} \le \varepsilon} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

1.Montrer que ce problème admet une solution unique u_ε.
2. Montrer que soit $u_\varepsilon = f$, soit $u_\varepsilon = 0$, soit il existe $\lambda > 0$ tel que u_ε est solution de

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon + \lambda(u_\varepsilon - f) = 0 \ \ \textit{dans} \ \ \Omega \\ u_\varepsilon = 0 \quad \textit{sur} \ \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Exercise 3 *On étudie la première valeur propre du Laplacien dans un domaine Ω bornée. Pour cela on considère le problème de minimisation*

$$\min_{v \in K} \left\{ J(v) := \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \right\}$$

avec

$$K = \left\{ v \in H_0^1(\Omega), \quad \textit{telles que} \quad \int_\Omega v^2 dx = 1 \right\}.$$

1. Montrer que ce problème admet un minimum (on peut montrer que K est compact).
2. Ecrire les condition d'optimalité du premier ordre et en déduire que la valeur minimum est bien la première valeur propre et que les points minimums sont des vecteurs propres associés.