REPUBLIQUE DU SÉNÉGAL
Ministère de l'enseignement supérieur
et de la recherche

Université Alioune Diop de Bambey

ALGÈBRE LINÉAIRE III

Partie II Systèmes linéaires.

Dr **ALASSANE SY**

CHARGÉ D'ENSEIGNEMENTS

Année Académique 2012-2013

Table des matières

LICENCE II : M.P.C.I & S.I.D.
Examen d'Algèbre III : Session 1 : Durée 3h

Exercise 1 *Soit* $A_t = (a_{ij})_{1\leq 1,j\leq n}$ *une matrice* $n \times n$ *tels que* $a_{ij} = \begin{cases} t & si \;\; i = j \\ 1 & si \;\; i \neq j \end{cases}$

$$A_t = \begin{bmatrix} t & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & t \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

a) Sans calculer le polynôme caractéristique montrer que $\lambda = t - 1$ *est une valeur propre de* A_t*. Quel est son ordre de multiplicité ?*
b) Déterminer E_{t-1}*, en déduire le spectre de* A_t
c) A_t *est-elle diagonalisable ?*

Exercise 2 *Soit* θ *un réel vérifiant* $\sin 2\theta \neq 0$ *et* $\cos 2\theta \neq 0$.

On considère l'ensemble des endomorphismes φ *de* $\mathbb{R}^3$ *défini par la matrice*

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \sin 2\theta & \sin 4\theta \\ \sin 2\theta & 0 & \sin 4\theta \\ \sin 4\theta & \sin 2\theta & 0 \end{bmatrix}$$

1) Calculer les valeurs propres de φ *et vérifier que leur somme est nulle.*
2) On se propose de réduire M *à la forme diagonale ou à défaut à la forme triangulaire.*

a) Etablir que φ *admet une valeur propre de multiplicité deux (2) si et seulement si l'une des condition suivantes est satisfaites*

$$(i) \quad \cos 2\theta = -1, \quad (ii) \quad \cos 2\theta = \frac{1}{2}, \qquad (iii) \quad \cos 2\theta = -\frac{1}{4}$$

b) Déterminer chacune de ces valeurs propres en indiquant le sous-espace propre associé.

c) Préciser dans quel cas φ *est diagonalisable (respectivement non diagonalisable) et donner chaque fois la forme réduite correspondante de* M.

LICENCE II : M.P.C.I & S.I.D.
Correction de l'examen d'Algèbre III : Session 1

Solution 1 *a) Soit* $A_t = \begin{bmatrix} t & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & t \end{bmatrix}$; *Alors*

$$\det(A-(t-1)I_n) = \det\left\{\begin{bmatrix} t & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t-1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & t-1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Le rang de $(A-(t-1)I_n) = 1$, *il en résulte que l'ordre de multiplicité de* $t-1$ *est* $n-1$
b)

$$E_{t-1} = \left\{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \ \text{tel que} \ \begin{bmatrix} t & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = (t-1)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + ... + x_n = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2 - ... - x_n$$

$$E_{t-1} = vect\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \cdots; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

En remarquant que la somme des éléments d'une quelconque ligne vaut $t+n-1$, *on en déduit que* $\lambda = t+n-1$ *est une valeur propre de* A_t.
Par conséquent $spec(A_t) = \{t-1, t+n-1\}$.
La dimension de chaque sous-espace propre étant égale à la valeur propre associé, on en déduit que A_t *est diagonalisable.*

$$A^* = \begin{pmatrix} t-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & t-1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & t+n-1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution 2 *1) On rappelle que* $\sin 2u = 2\sin u\cos u$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \sin 2\theta & \sin 4\theta \\ \sin 2\theta & 0 & \sin 4\theta \\ \sin 4\theta & \sin 2\theta & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow P_M(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & \sin 2\theta & \sin 4\theta \\ \sin 2\theta & -\lambda & \sin 4\theta \\ \sin 4\theta & \sin 2\theta & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin 2\theta + \sin 4\theta - \lambda & \sin 2\theta & \sin 4\theta \\ \sin 2\theta + \sin 4\theta - \lambda & -\lambda & \sin 4\theta \\ \sin 2\theta + \sin 4\theta - \lambda & \sin 2\theta & -\lambda \end{vmatrix} = (\sin 2\theta + \sin 4\theta - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & \sin 2\theta & \sin 4\theta \\ 1 & -\lambda & \sin 4\theta \\ 1 & \sin 2\theta & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\sin 2\theta + \sin 4\theta - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & \sin 2\theta & \sin 4\theta \\ 0 & -\sin 2\theta - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\sin 4\theta - \lambda \end{vmatrix} = (\sin 2\theta + \sin 4\theta - \lambda)(\sin 2\theta + \lambda)(\sin 4\theta + \lambda)$$

Les valeurs propres de M *sont :* $\lambda_1 = \sin 2\theta + \sin 4\theta,\ \lambda_2 = -\sin 2\theta,\ \lambda_3 = -\sin 4\theta$ *dont la somme est nulle.*

2) a) i) Supposons que $[\lambda_1 = \lambda_2] \Longleftrightarrow [\sin 2\theta + \sin 4\theta = -\sin 2\theta]$

$$\Longleftrightarrow 2\sin 2\theta(1 + \cos 2\theta) = 0;\ \sin 2\theta \neq 0 \Longrightarrow \cos 2\theta = -1$$

Réciproquement si $\cos 2\theta = -1,$ *alors* $\lambda_1 = -\sin 2\theta = \lambda_2$

ii) Supposons que $[\lambda_1 = \lambda_3] \Longleftrightarrow [\sin 2\theta + \sin 4\theta = -\sin 4\theta]$

$$\Longleftrightarrow \sin 2\theta(1 + 4\cos 2\theta) = 0;\ \sin 2\theta \neq 0 \Longrightarrow \cos 2\theta = -\frac{1}{4}$$

Réciproquement si $\cos 2\theta = -\frac{1}{4},$ *alors*

$$\lambda_1 = \frac{\sin 2\theta}{2} = -2\sin 2\theta(-\frac{1}{4}) = -\sin 2\theta\cos 2\theta = -\sin 4\theta = \lambda_3$$

iii) Supposons que $[\lambda_2 = \lambda_3] \Longleftrightarrow [\sin 2\theta = \sin 4\theta]$

$$\Longleftrightarrow \sin 2\theta(1 - 2\cos 2\theta) = 0;\ \sin 2\theta \neq 0 \Longrightarrow \cos 2\theta = \frac{1}{2}$$

Réciproquement si $\cos 2\theta = \frac{1}{2},$ *alors*

$$\lambda_2 = -\sin 2\theta = -2\sin 2\theta(\frac{1}{2}) = -2\sin 2\theta\cos 2\theta = -\sin 4\theta = \lambda_3$$

b) Dans le cas où $\cos 2\theta \neq -1;\ \cos 2\theta \neq \frac{1}{2},\ \ \cos 2\theta \neq -\frac{1}{4},$ *alors les trois valeurs propres sont distinctes par conséquent* M *admet une matrice réduite diagonale :*
Determination des sous-espaces propres :
Pour $\lambda_1 = \sin 2\theta + \sin 4\theta$

$$E_{\lambda_1} = \left\{ X = \left\{ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right\} \in \mathbb{R}^3 \ \ /MX = (\sin 2\theta + \sin 4\theta)X \right\}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & \sin 2\theta & \sin 4\theta \\ \sin 2\theta & 0 & \sin 4\theta \\ \sin 4\theta & \sin 2\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (\sin 2\theta + \sin 4\theta) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} -(\sin 2\theta + \sin 4\theta) & \sin 2\theta & \sin 4\theta \\ \sin 2\theta & -(\sin 2\theta + \sin 4\theta) & \sin 4\theta \\ \sin 4\theta & \sin 2\theta & -(\sin 2\theta + \sin 4\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow x = y = z \Longrightarrow E_{\sin 2\theta + \sin 4\theta} = vect\{V_1\};\ V_1 = (1, 1, 1)$$

Pour $\lambda_2 = -\sin 2\theta$

$$E_{\lambda_2} = \left\{ X = \left\{ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right\} \in \mathbb{R}^3 \ \ /MX = -\sin 2\theta X \right\}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & \sin 2\theta & \sin 4\theta \\ \sin 2\theta & 0 & \sin 4\theta \\ \sin 4\theta & \sin 2\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\sin 2\theta \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \sin 2\theta & \sin 2\theta & \sin 4\theta \\ \sin 2\theta & \sin 2\theta & \sin 4\theta \\ \sin 4\theta & \sin 2\theta & \sin 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x = z;\ y = -(1 - 2\cos 2\theta)x \Longrightarrow E_{-\sin 2\theta} = vect\{V_2\};\ V_2 = (1, -1 - \cos 2\theta, 1)$$

Pour $\lambda_3 = -\sin 4\theta$

$$E_{\lambda_3} = \left\{ X = \left\{ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right\} \in \mathbb{R}^3 \ \ /MX = -\sin 4\theta X \right\}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & \sin 2\theta & \sin 4\theta \\ \sin 2\theta & 0 & \sin 4\theta \\ \sin 4\theta & \sin 2\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\sin 4\theta \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \sin 4\theta & \sin 2\theta & \sin 4\theta \\ \sin 2\theta & \sin 4\theta & \sin 4\theta \\ \sin 4\theta & \sin 2\theta & \sin 4\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x = y;\ = -\frac{1 + 2\cos 2\theta}{2\cos 2\theta} x \Longrightarrow E_{-\sin 4\theta} = vect\{V_3\};\ V_3 = (1, 1, -\frac{1 + 2\cos 2\theta}{\cos 2\theta})$$

Relativement à la base $\{V_1, V_2, V_3\}$ *la matrice de* φ *est* $M^* = \begin{bmatrix} \sin 2\theta + \sin 4\theta & 0 & 0 \\ 0 & -\sin 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & -\sin 4\theta \end{bmatrix}$

et la matrice de passage est $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 - \cos 2\theta & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{1+2\cos 2\theta}{\cos 2\theta} \end{bmatrix}$

c) M *admet une valeur propre double :*

i) $\cos 2\theta = -1 \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\sin 2\theta \Longrightarrow E_{-\sin 2\theta} = vect\{V_2\};\ V_2 = (1,1,1)$
La multiplicité de cette valeur propre est supérieure à la dimension de l'espace propre associé donc M n'est pas diagonalisable, mais comme $P_M(\lambda)$ est scindé alors M admet une réduite sous forme de Jordan. $M^* = \begin{bmatrix} -\sin 2\theta & 1 & 0 \\ 0 & -\sin 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 2\sin 2\theta \end{bmatrix}$

ii) $\cos 2\theta = -\frac{1}{4} \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_3 = \frac{\sin 2\theta}{2} \Longrightarrow E_{\frac{\sin 2\theta}{2}} = vect\{V_2\};\ V_2 = (1,1,1)$
La multiplicité de cette valeur propre est supérieure à la dimension de l'espace propre associé donc M n'est pas diagonalisable, mais comme $P_M(\lambda)$ est scindé alors M admet une réduite sous forme de Jordan. $M^* = \begin{bmatrix} \frac{\sin 2\theta}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sin 2\theta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sin 2\theta \end{bmatrix}$

iii) $\cos 2\theta = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = -\sin 2\theta \Longrightarrow E_{-\sin 2\theta} = vect\{V_2, V_3\};\ V_2 = (-1,0,1),\ V_3(-1,1,0)$
La multiplicité de cette valeur propre est égale à la dimension de l'espace propre associé donc M est diagonalisable $M^* = \begin{bmatrix} 2\sin 2\theta & 0 & 0 \\ 0 & -\sin 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & -\sin 2\theta \end{bmatrix}$

M.P.C.I./S.I.D. 2

Examen d'Algèbre III : Session 2 ; Durée 3h.

Exercise 3 *(5points) x, y, z étant trois nombres complexes, écrire sous forme d'un produit d'élément le déterminant suivant :*

$$D = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^4 & y^4 & z^4 \end{vmatrix}$$

Exercise 4 *(5points) On considère $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculer les valeurs propres de φ et pour chacune d'elles déterminer un vecteur propre associé soient V_1, V_2, V_3 respectivement.

Etablir que la matrice $A = [V_1\ V_2\ V_3]$ est régulière (inversible) et trouver la matrice $M^* = A^{-1}MA$

Exercise 5 *(10points) On dit qu'un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$ est nilpotent d'indice p, s'il existe $p > 1$ tel que $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$. On dira de même qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente d'indice p s'il existe $p > 1$ tel que $A^{p-1} \neq 0$ et $A^p = 0$.*

1. *a) Montrer que si f est nilpotent et s'il existe $\theta \in \mathbb{K}$ et $x \neq 0$ de E tel que $f(x) = \theta x$ alors $\theta = 0$*

   b) f étant nilpotent d'indice p, démontrer que si x est tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$, les vecteurs

   $$x = f^0(x),\ f^1(x), \cdots, f^{p-1}(x)$$

   sont linéairement indépendants

   c) En déduire que f est nilpotent d'indice n, si et seulement si il existe une base (a_i) de E telle que pour la matrice

   $$A = M(f, (a_i)) = \alpha_{ij}$$

   tous les α_{ij} sont nuls sauf $\alpha_{i,i+1} = 1$ $(1 \leq i \leq n-1)$.

2. *A étant une matrice nilpotente d'indice p de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Démontrer que $I_n - A$ est inversible et calculer son inverse.*

3. *Application : On considère la matrice :*

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Montrer que $N = A - I_4$ est nilpotente. En déduire A^k pour $k \in \mathbb{K}$ (remarquer que I_4 et N commutent).

M.P.C.I./S.I.D. 2

Correction de l'examen d'Algèbre III : Session 2 ; Durée 3h.

Solution 3

$$D = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^4 & y^4 & z^4 \end{vmatrix} = xyz \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = xyz \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x \\ x^3 & y^3-x^3 & z^3-x^3 \end{vmatrix}$$

On sait que

$$y^3 - x^3 = (y-x)(y^2+xy+x^2) \quad et \quad z^3 - x^3 = (z-x)(z^2+xz+x^2)$$

Donc

$$D = xyz(y-x)(z-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y^2+xy+x^2 & z^2+xz+x^2 \end{vmatrix}$$

$$= xyz(y-x)(z-x) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ y^2+xy+x^2 & (z-y)(z+y+x) \end{vmatrix}$$

$$D = xyz(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$$

Solution 4 $M = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

$$P_M(X) = \det(M - XI_3) = \begin{vmatrix} -X & -3 & 1 \\ -4 & 1-X & 1 \\ 4 & -3 & -3-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-X & X-4 & 0 \\ -4 & 1-X & 1 \\ 0 & -2-X & -2-X \end{vmatrix}$$

$$= -(X-4)(2+X) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 1-X & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(X-4)(2+X) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -4 & -3-X & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$P_M(X) = (X-4)(2+X)(4+X)$; *M admet 3 valeur propres simples*
$spec_{\mathbb{R}}(M) = \{4, -2, -4\}$, donc M est diagonalisable

$$E_4 = \left\{ X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ (M - 4I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 \\ -4 & -3 & 1 \\ 4 & -3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -4x - 3y + z = 0 \\ 4x - 3y - 7z = 0 \end{cases} \Longrightarrow x = -y = z \ \text{donc}\ E_4 = vect\{V_1\},\ \text{avec}\ V_1 = (1,-1,1)$$

$$E_{-2} = \left\{ X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ (M + 2I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ -4x + 3y + z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow x = 3y = -z \ donc \ E_2 = vect\{V_2\}, \ avec \ V_2 = (1,1,1)$$

$$E_{-4} = \left\{ X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ (M + 4I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x - 3y + z = 0 \\ -4x + 5y + z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow x = y = -z \ donc \ E_3 = vect\{V_3\}, \ avec \ \ V_3 = (1,1,-1)$$

La matrice réduite de M est $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$, *la matrice de passage est*

$$P = [V_1 \ V_2 \ V_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Longrightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Solution 5 *1) a) Supposons qu'il* $\exists \theta \in \mathbb{K} \ / \ f(x) = \theta x, \ x \neq 0$
f étant linéaire alors $f(f(x)) = f(\theta x) = \theta f(x)$
f étant nilpotente d'indice p

$$\Longrightarrow f^p(x) = 0 \quad or \quad f^p(x) = f^{p-1}(f(x)) = f^{p-1}(\theta x) = \theta f^{p-1}(x) = 0 \qquad (*)$$

comme $f^{p-1}(x) \neq 0$ *il en découle que* $\theta = 0$
b) Soit x / $f^{p-1}(x) \neq 0$. Supposons qu'il existe $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{K}$ /

$$\lambda_0 f^0(x) + \lambda_1 f^1(x) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x) = 0$$

On a alors

$$f[\lambda_0 f^0(x) + \lambda_1 f^1(x) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x)] = f(0) = 0$$
$$\lambda_0 f^1(x) + \lambda_1 f^2(x) + \cdots + \lambda_{p-1} f^p(x) = 0$$

$f^p(x) = 0$, *l'égalité précédente devient*

$$\lambda_0 f^1(x) + \lambda_1 f^2(x) + \cdots + \lambda_{p-2} f^{p-1}(x) = 0$$

Puis on réitère l'opération $p-1$ fois et on obtient $\lambda_0 f^{p-1}(x) + \lambda_1 f^p(x) = 0 \Longrightarrow \lambda_0 f^{p-1}(x) = 0$, *ce qui d'après a) implique que* $\lambda_0 = 0$, *puis on revient à l'ordre $p-1$ et onobtient* $\lambda_1 f^{p-1}(x) + \lambda_2 f^p(x) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0$. *De proche en proche on obtient* $\lambda_{p-2} f^{p-1}(x) + \lambda_{p-1} f^p(x) = 0 \Longrightarrow \lambda_{p-2} = 0$ *et donc finalement (*) implique* $\lambda_{p-1} = 0$ *d'où*

$$\{f^0(x), f^1(x) + \cdots, f^{p-1}(x)\}$$

est libre.

c) Si $f \in \mathcal{L}_n(E,\mathbb{K})$ est nilpotent d'indice n, on vu que

$$\{f^0(x), f^1(x) + \cdots, f^{n-1}(x)\}$$

est un système libre, donc constitue une base de E

Soit M la matrice de f dans la base
$\{u_1, u_2, \cdots, u_n\} = \{f^{n-1}(x), f^{n-2}(x) + \cdots, f^0(x)\}$, *alors on a*
$f(u_1) = f^n(x) = 0,$
$f(u_2) = f(f(^{n-2}(x)) = f^{n-1}(x) = u_1,$
$\vdots$
$f(u_n) = f(f^0(x)) = f^1(x) = u_{n-1}$
on alors

$$M(f)_{\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Réciproquement si f admet M comme matrice par rapport à une base, alors on vérifie que f est nilpotent d'indice n car M l'est.

2) M étant nilpotente d'indice p; $\Longrightarrow M^p = 0$

$$I - M^p = I^p - M^p = (I-M)\sum_{k=0}^{p-1} I^k M^{p-k} = (I-M)\sum_{k=0}^{p-1} M^{p-k} = I$$

Par conséquent $I - M$ est inversible et on a :

$$(I-M)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} M^{p-k}$$

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_4 + N$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

N est nilpotente d'indice 4.

$$A^k = (I_4 + N)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j N^j I_4^{k-j} = C_k^0 I_4 + C_k^1 N + C_k^2 N^2 + C_k^3 N^3$$

car I_4 et N commutent (on applique la formule de binôme) et pour $j > 3$, $N^j = 0$

$$\begin{aligned} A^k &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{k(k-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{k(k-1)(k-2)}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & k & \frac{k(k-1)}{2} & \frac{k(k-1)(k-2)}{6} \\ 0 & 1 & k & \frac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$