Ondes et Vibrations

Pr. Mactar FAYE

Chapitre 3 (Séquence 2) Décomposition d’un signal périodique

« L'**analyse harmonique** est la branche des mathématiques qui étudie la représentation des fonctions ou des signaux comme une superposition d'ondes de base. Elle approfondit et généralise les notions de série de Fourier et de transformée de Fourier. Les ondes de base s'appellent les harmoniques, d'où le nom de la discipline ».

Wikipédia

Séries de Fourier : Définition

Toute fonction périodique de période T peut se décomposer comme la somme de fonction cosinus et sinus

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \right]$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega\ t\ dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\omega\ t\ dt$$

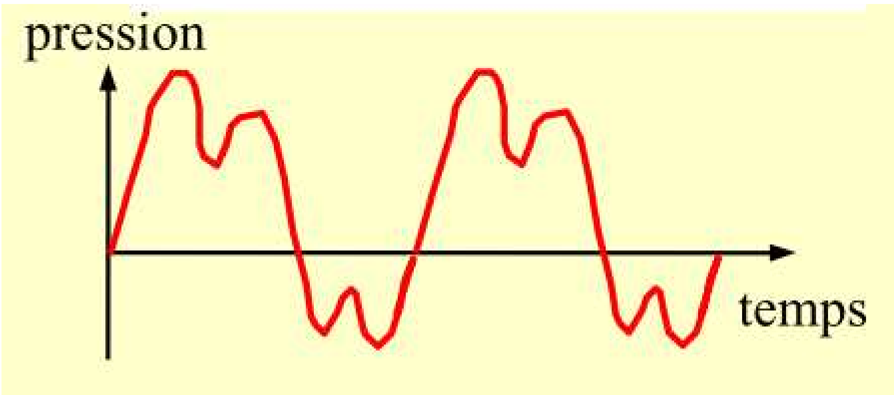
t_0 est un instant quelconque. On peut prendre par exemple $t_0 = -\dfrac{T}{2}$

Séries de Fourier : Propriétés

Si $f(t)$ est pair $b_n = 0$

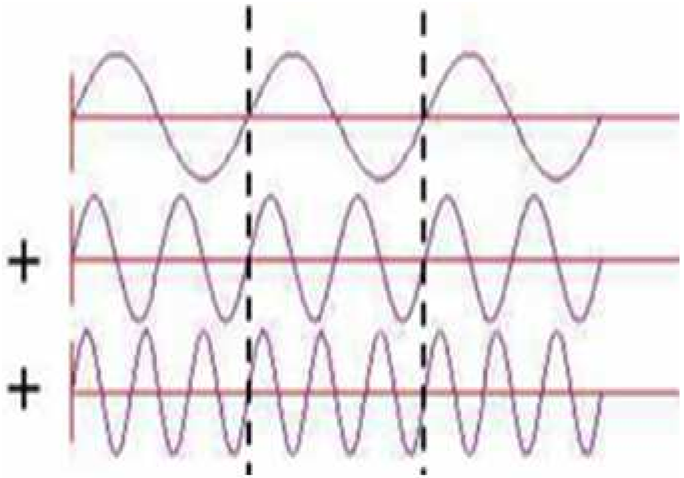
Si $f(t)$ est impair $a_n = 0$, $a_0 = 0$

Séries de Fourier : Représentation spectrale



Représentation temporelle d'une fonction f(t) périodique de période T

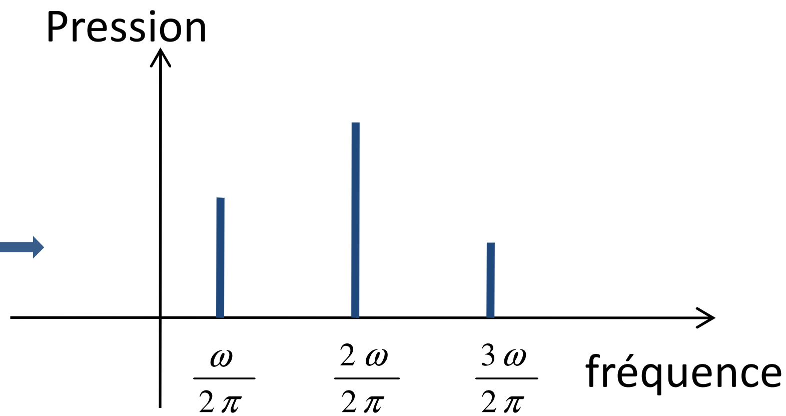
Décomposition en série de Fourier



$u_1 = a_1 \sin(\omega t)$

$u_2 = a_2 \sin(2\omega t)$

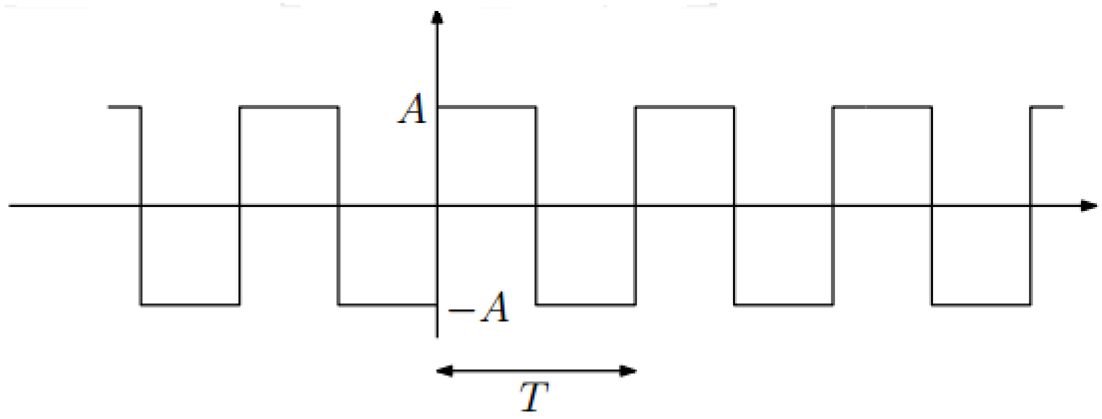
$u_3 = a_3 \sin(3\omega t)$



Représentation spectrale

Séries de Fourier : Exemple

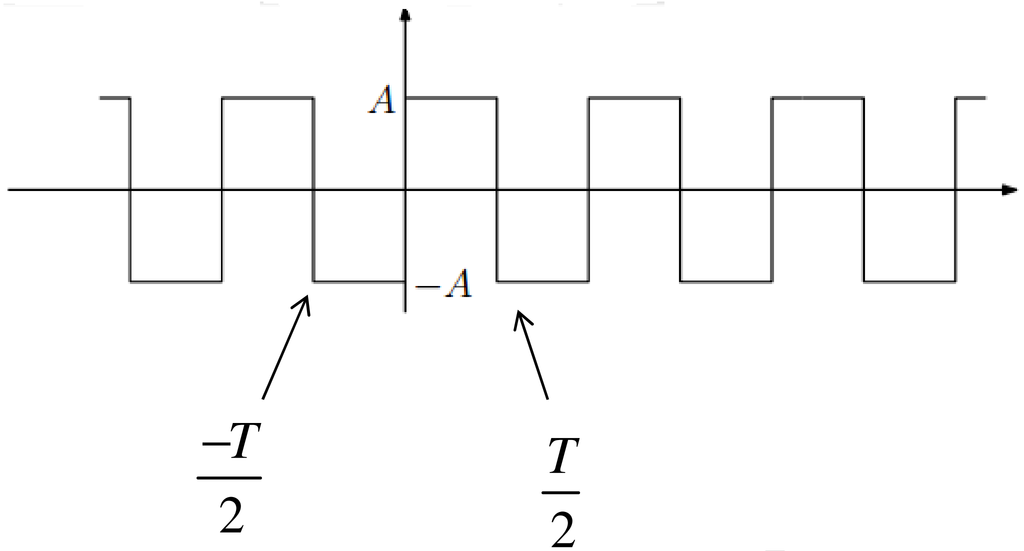
On considère le signal périodique ci-dessous



1. Etude de la parité :

la fonction est impaire. donc $a_n = 0$, $a_0 = 0$

2. Calcul des b_n



$$f(t)=\begin{cases} -A & \frac{-T}{2}<t<0 \\ A & 0<t<\frac{-T}{2} \end{cases}$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega\, t\, dt \quad =\frac{2}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{0}(-A)\sin n\omega\, t\, dt+\frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}(A)\sin n\omega\, t\, dt\right]$$

$$=\frac{2A}{Tn\omega}\left(\left[\cos n\omega\, t\right]_{-\frac{T}{2}}^{0}-\left[\cos n\omega\, t\right]_{0}^{\frac{T}{2}}\right) \quad =\frac{A}{n\pi}\left(1-\cos(n\pi)-\cos(n\pi)+1\right)$$

$$\boxed{=\frac{2A}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)}$$

Fin