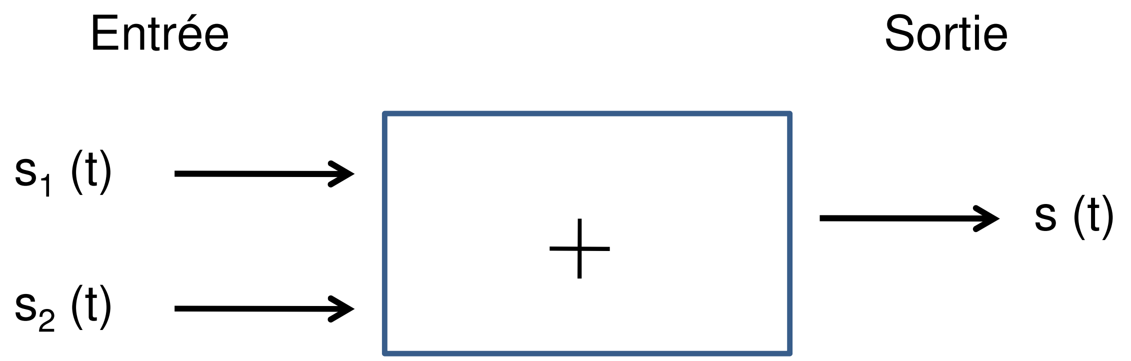
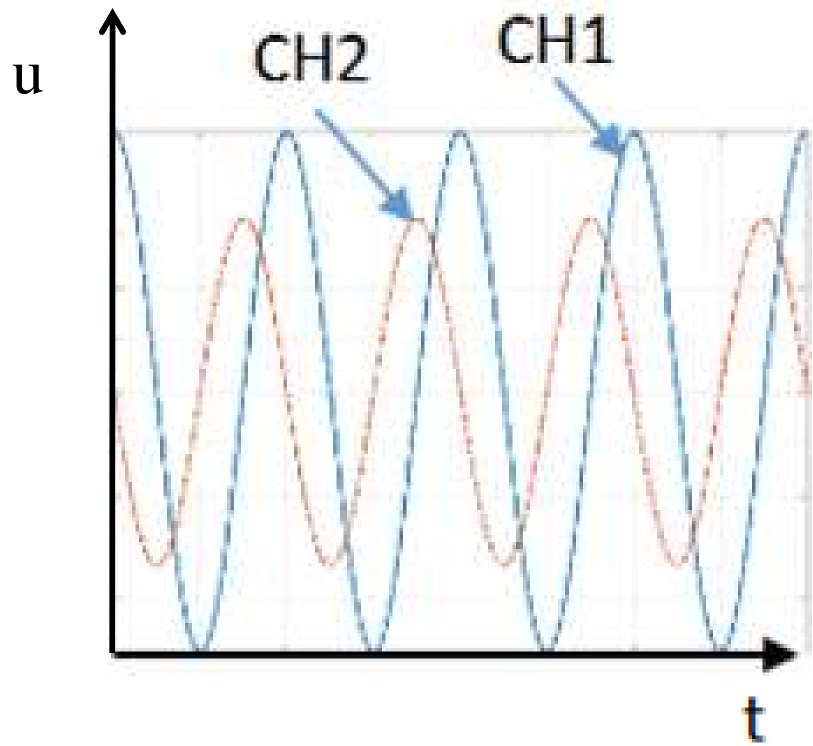
Ondes et Vibrations

Pr. Mactar FAYE

Chapitre 3 (Séquence 1) : Composition de signaux harmoniques



$s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont de forme sinusoïdale :



Quelle est la forme du signal de sortie s(t)?

1. Composition de deux grandeurs harmoniques scalaires de même fréquence

On considère les grandeurs harmoniques de même fréquence :

$$s_1 = A_1 \cos(\omega \cdot t + \varphi_1) \qquad \text{et} \qquad s_2 = A_2 \cos(\omega \cdot t + \varphi_2)$$

Montrons $\quad s = s_1 + s_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$

Méthode complexe

$$s_1 = A_1 \cos(\omega \cdot t + \varphi_1) \longrightarrow \bar{s}_1 = A_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)}$$

$$s_2 = A_2 \cos(\omega \cdot t + \varphi_2) \longrightarrow \bar{s}_2 = A_2 e^{j(\omega t + \varphi_2)}$$

$$\bar{s} = \bar{s}_1 + \bar{s}_2 = A_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)} + A_2 e^{j(\omega t + \varphi_2)} = \left(A_1 e^{j\varphi_1} + A_2 e^{j\varphi_2}\right) e^{j\omega t}$$

Posons

$$A_1 e^{j\varphi_1} + A_2 e^{j\varphi_2} = A e^{j\varphi} \quad \Rightarrow \quad \bar{s} = A e^{j(\omega t + \varphi)}$$

La solution réelle est : $s = \mathrm{Re}(\bar{s}) = A\cos(\omega t + \varphi)$

Le signal de sortie s(t) est une fonction sinusoïdale d'amplitude A.

Calculons l'amplitude A et la phase à l'origine φ

$$A_1 e^{j\varphi_1} + A_2 e^{j\varphi_2} = A e^{j\varphi}$$ soit

$$(A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2) + j(A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2) = A\cos\varphi + jA\sin\varphi$$

Par identification, on a

$$A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2 = A\cos\varphi$$

$$A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2 = A\sin\varphi$$

En calculant $(A\cos\varphi)^2 + (A\sin\varphi)^2$

et en tenant compte de la propriété : $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$

on abouti à : $\boxed{A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2\cdot A_1\cdot A_2\cdot\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$

En faisant le rapport $\dfrac{A\sin\varphi}{A\cos\varphi}$

on abouti à : $\boxed{\tan\varphi = \dfrac{A_1\cdot\sin\varphi_1 + A_2\cdot\sin\varphi_2}{A_1\cdot\cos\varphi_1 + A_2\cdot\cos\varphi_2}}$

Le signal de sortie s(t) est une fonction sinusoïdale d'amplitude constante.

2. Composition de deux grandeurs harmoniques scalaires de fréquences différentes, battement

$$s_1 = A_1 \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_1)$$

$$s_2 = A_2 \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi_2)$$

Montrons $$s = s_1 + s_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$$

En déduire A et φ

En notation complexe on a :

$$\bar{s} = \bar{s}_1 + \bar{s}_2 = A_1 e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)} + A_2 e^{j(\omega_2 t + \varphi_2)}$$

Posons $\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ et $\Delta\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$ $\Rightarrow$ $$\omega_1 = \omega + \Delta\omega$$ $$\omega_2 = \omega - \Delta\omega$$

$\Rightarrow$ $\bar{s} = \left(A_1 e^{j(\Delta\omega t + \varphi_1)} + A_2 e^{j(-\Delta\omega t + \varphi_2)}\right) e^{j\omega t} = A e^{j(\varphi)} e^{j\omega t}$ soit $s = \mathrm{Re}(\bar{s}) = A\cos(\omega t + \varphi)$

Le signal de sortie s(t) est une fonction sinusoïdale d'amplitude A.

Après calcul, on obtient : $$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \cos(2\Delta\omega \cdot t + \varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\tan\varphi = \frac{A_1 \cdot \sin(\Delta\omega \cdot t + \varphi_1) - A_2 \cdot \sin(\Delta\omega \cdot t - \varphi_2)}{A_1 \cdot \cos(\Delta\omega \cdot t + \varphi_1) + A_2 \cdot \cos(\Delta\omega \cdot t - \varphi_2)}$$

Le signal de sortie s(t) est une fonction sinusoïdale d'amplitude variable.

Remarque 1 :

L'amplitude A et la φ phase dépendent du temps lorsque les fréquences sont différentes

Remarque 2 :

L'amplitude dépend du temps par l'intermédiaire d'un fonction sinusoïdale.

Donc, elle admet un maximun A_{max} et minimun A_{min} :

$$A_{max} = |A_1 + A_2| \qquad A_{min} = |A_1 - A_2|$$

On dit que l'amplitude est **modulée**.

La **profondeur de modulation** s'écrit : $$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}}$$

Remarque 3 :

Cas où les deux signaux ont la même amplitude

$$s_1 = A\cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_1) \qquad s_2 = A\cos(\omega_2 \cdot t + \varphi_2)$$

Posons $\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ et $\Delta\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$ $\Rightarrow$ $\omega_1 = \omega + \Delta\omega$, $\omega_2 = \omega - \Delta\omega$

$$s = A(\cos((\omega + \Delta\omega) \cdot t + \varphi_1) + \cos((\omega - \Delta\omega) \cdot t + \varphi_2))$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

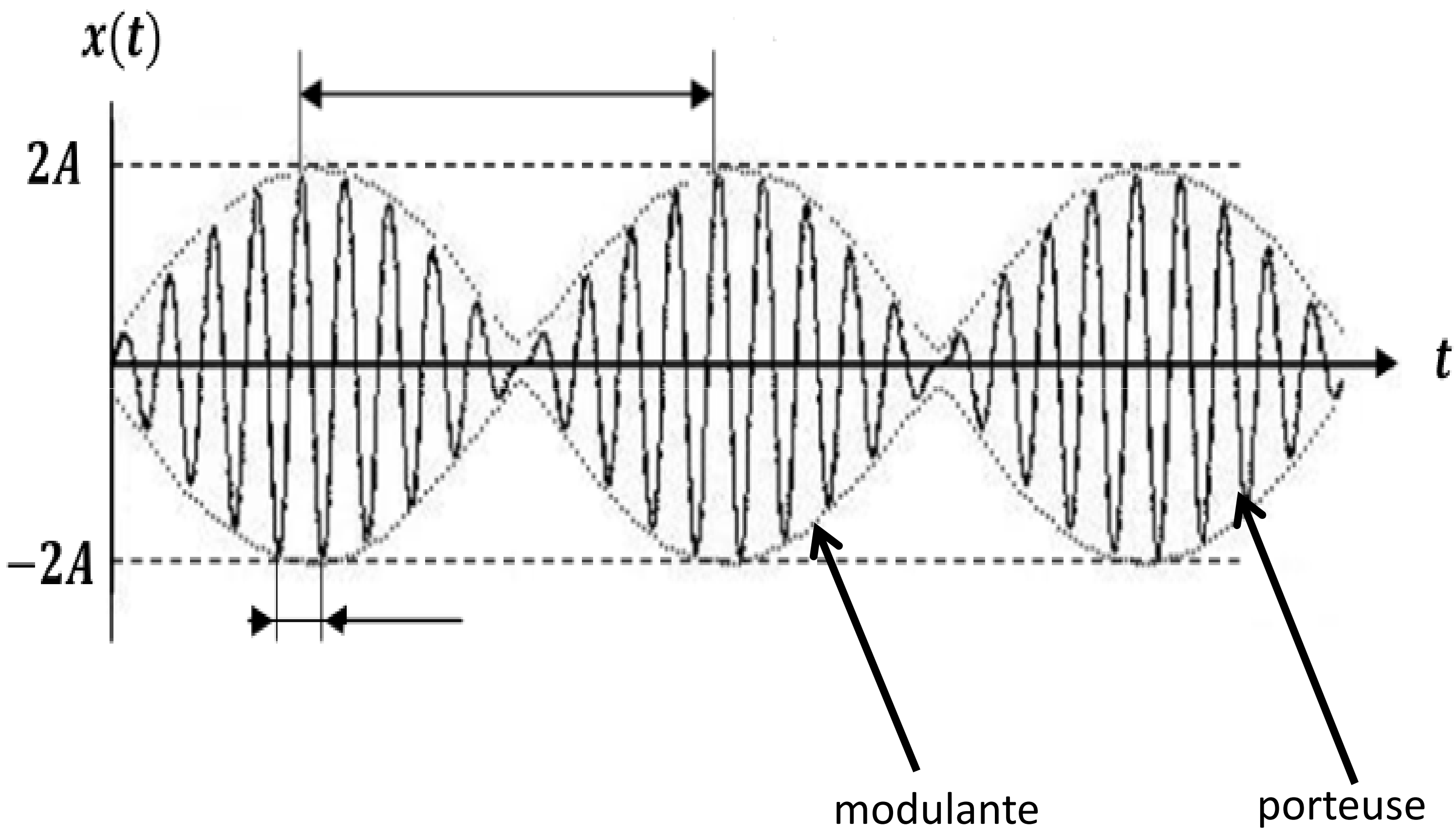
$$s = \underbrace{2A\cos\left(\Delta\omega\cdot t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)}_{\text{modulante}}\underbrace{\cos\left(\omega\cdot t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)}_{\text{porteuse}}$$

Le signal de sortie s(t) est un produit de deux signaux : modulante et porteuse

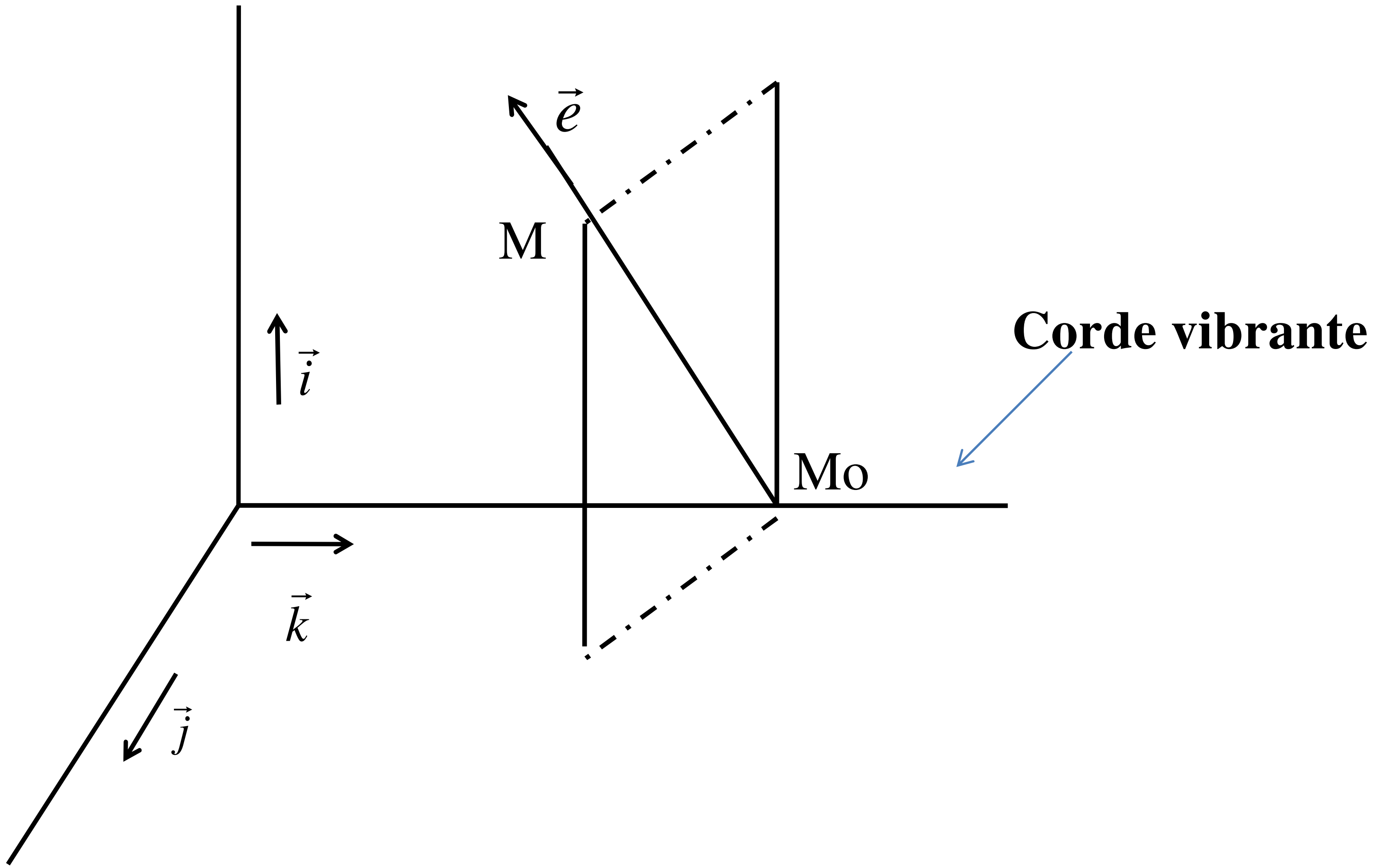
$$Amplitude = 2A\cos\left(\Delta\omega\cdot t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)$$

L’amplitude dépend du temps par l’intermédiaire d’une fonction sinusoïdale.
Elle admet un maximun 2A et un minimum -2A. Elle est donc modulée.

Représentation : si la différente des deux fréquences est faible, on obtient un phénomène de battement



3. Composition de deux grandeurs vectorielles perpendiculaires et de même fréquence, polarisation



Le point Mo peut se déplacer sur le plan.

Si le point Mo se déplace suivant une seule direction : $\vec{e}$

alors on dit que la vibration est polarisée linéairement suivant $\vec{e}$

Détermination de l'équation de la trajectoire de M dans le plan P.

$$M\begin{cases} x = a\cos(\omega t + \varphi_1) \\ y = b\cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{a} = \cos(\omega t + \varphi_1) \\ \dfrac{y}{b} = \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

Posons $\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi$

On peut alors écrire $\dfrac{y}{b} = \cos((\omega t + \varphi_1) + \Delta\varphi) = \cos(\omega t + \varphi_1)\cos(\Delta\varphi) - \sin(\omega t + \varphi_1)\sin(\Delta\varphi)$

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a}\cos(\Delta\varphi) - \sin(\omega t + \varphi_1)\sin(\Delta\varphi)$$

Considérons le système

$$\frac{y}{b}-\frac{x}{a}\cos(\Delta\varphi)=-\sin(\omega t+\varphi_1)\sin(\Delta\varphi) \qquad (1)$$

$$\frac{x}{a}=\cos(\omega t+\varphi_1) \qquad (2)$$

Multiplions l'équation (2) par : $\sin(\Delta\varphi)$

$$\frac{y}{b}-\frac{x}{a}\cos(\Delta\varphi)=\sin(\omega t+\varphi_1)\sin(\Delta\varphi) \qquad (1)$$

$$\frac{x}{a}\sin(\Delta\varphi)=\cos(\omega t+\varphi_1)\sin(\Delta\varphi) \qquad (2a)$$

Elevons les équations (1) et (2a) au carré

l'équation de la trajectoire de M est : $\boxed{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2-2\frac{xy}{ab}\cos\Delta\varphi=\sin^2\Delta\varphi}$ Ellipse

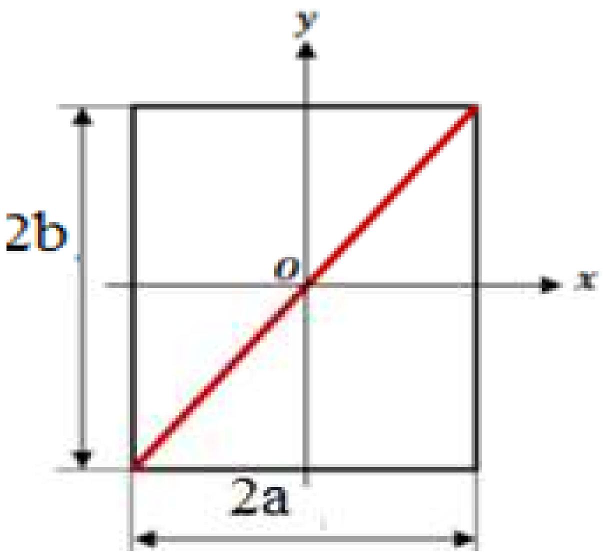
Cas particuliers

1. Les deux composantes sont en phase : $\Delta\varphi = 0$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 2\frac{xy}{ab} = 0 \longrightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0 \longrightarrow y = \frac{b}{a}x$$

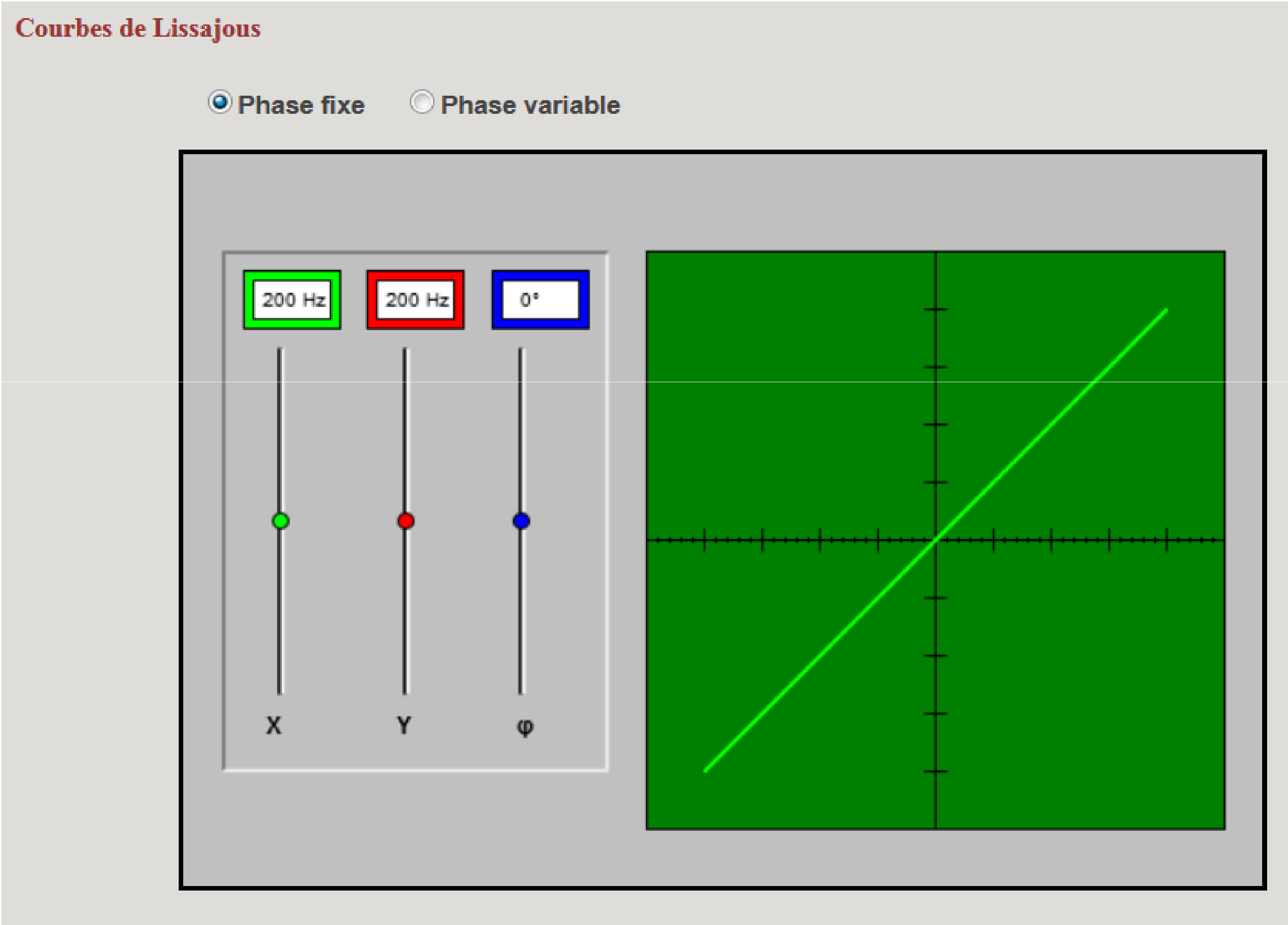
Conclusion : Lorsque les composantes de M sont en phase, la trajectoire est une droite de pente

$$\frac{b}{a} > 0$$



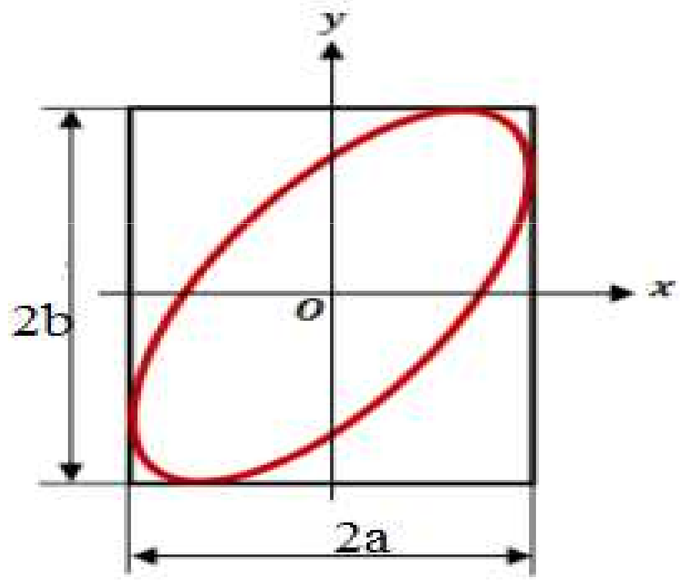
On dit que le mouvement est polarisé linéairement.

Sur un oscilloscope utilisé en mode XY, on applique sur l'entrée X la tension $X = A\cos(\omega \cdot t)$
et sur l'entrée Y $Y = B\cos(\omega \cdot t)$



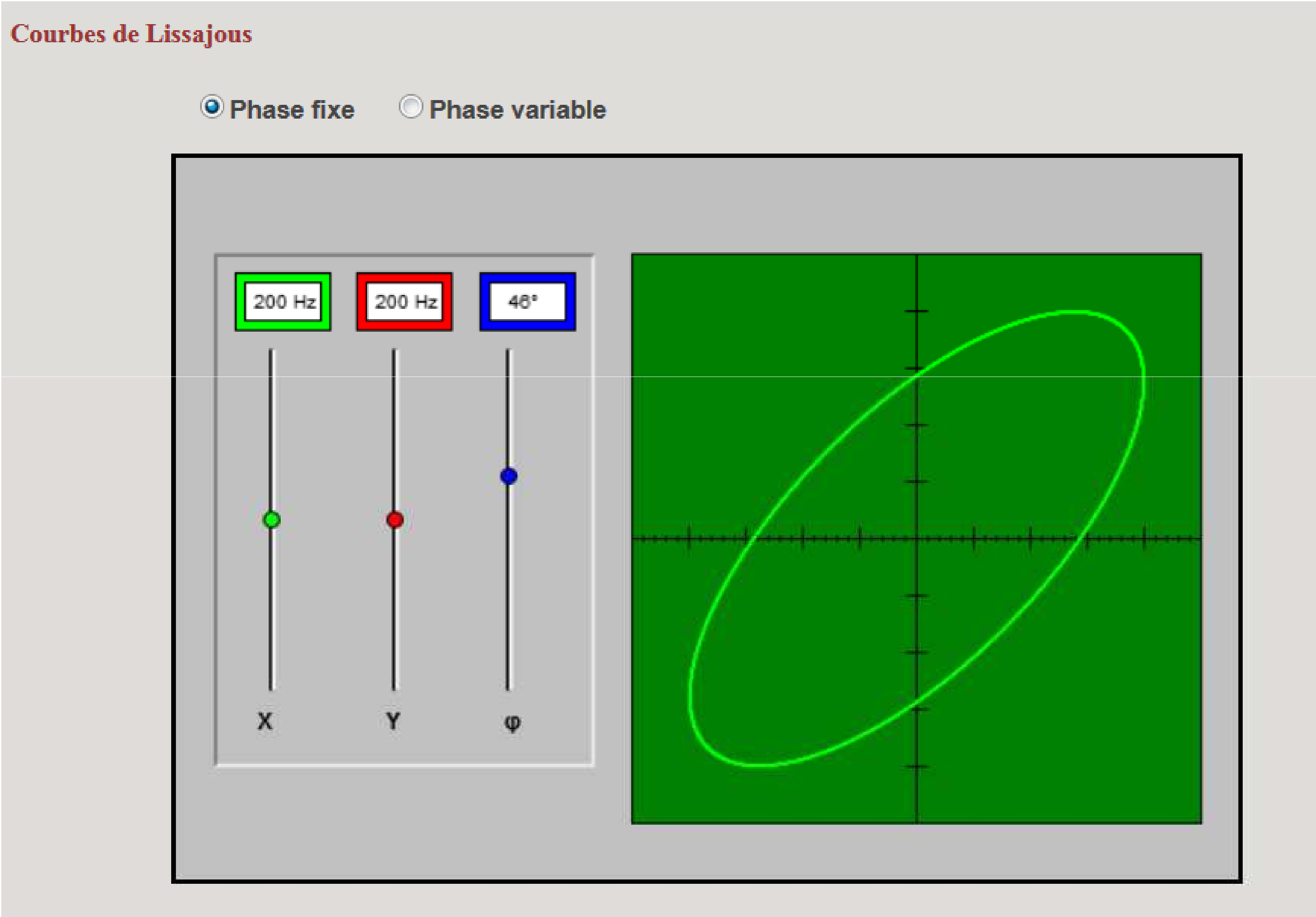
2. Les deux composantes sont en déphasage : $0 < \Delta\varphi < \dfrac{\pi}{2}$

Conclusion : la trajectoire est une ellipse de pente positive



Sur un oscilloscope utilisé en mode XY, on applique sur l'entrée X la tension $X = A\cos(\omega \cdot t)$
et sur l'entrée Y $Y = A\cos(\omega \cdot t - \varphi)$

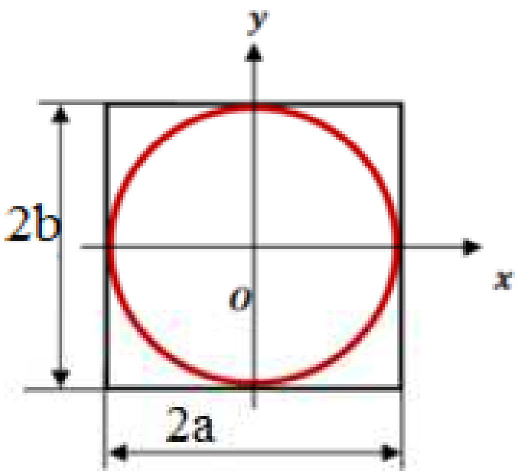
$$\varphi = 46^\circ$$



3. Les deux composantes sont en quadrature de phase : $\Delta\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$

$$a = b$$

l'équation de la trajectoire est un cercle :

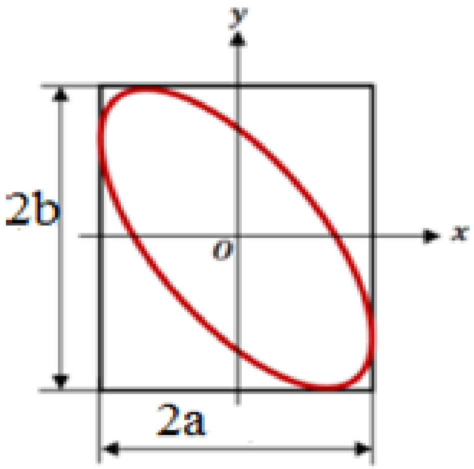


On dit que le mouvement est polarisé circulairement à droite si $\Delta\varphi = +\frac{\pi}{2}$

On dit que le mouvement est polarisé circulairement à gauche si $\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2}$

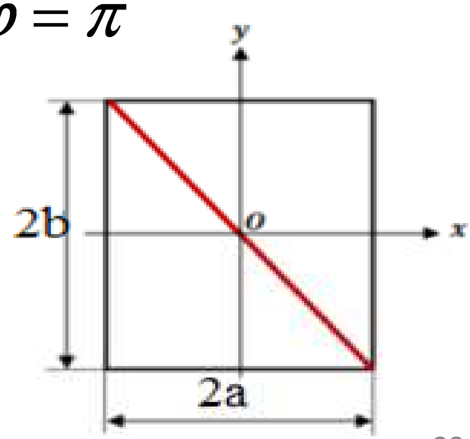
4. Les deux composantes sont en déphasage : $\frac{\pi}{2} < \Delta\varphi < \pi$

l'équation de la trajectoire est une ellipse de pente négative:



5. Les deux composantes sont en opposition de phase $\Delta\varphi = \pi$

l'équation de la trajectoire est une droite de pente négative :



4. Composition de deux grandeurs vectorielles perpendiculaires et de fréquences différentes

$$M\begin{cases} x = a\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y = b\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{a} = \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \dfrac{y}{b} = \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

Posons

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi$$

$$\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega \qquad \Rightarrow \qquad \omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$$

L'équation de la trajectoire de M est :

$$\boxed{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 2\frac{xy}{ab}\cos(\Delta\varphi + \Delta\omega t) = \sin^2(\Delta\varphi + \Delta\omega t)}$$

La trajectoire du point M est une ellipse qui se déforme au cours du temps.

Remarques

.

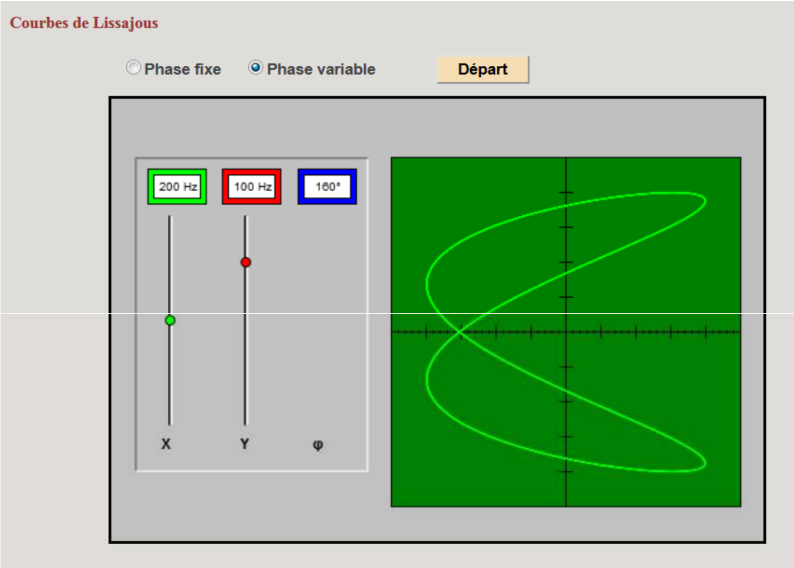
•Si les pulsations ω_1 et ω_2 sont proches c'est-à-dire $|\Delta\omega| << \omega_1$ alors la déformation de l'ellipse est observable sur un oscilloscope.

•Si les pulsations ω_1 et ω_2 ne sont pas proches c'est-à-dire, $|\Delta\omega| \approx \omega_1$ alors la déformation de l'ellipse est rapide.

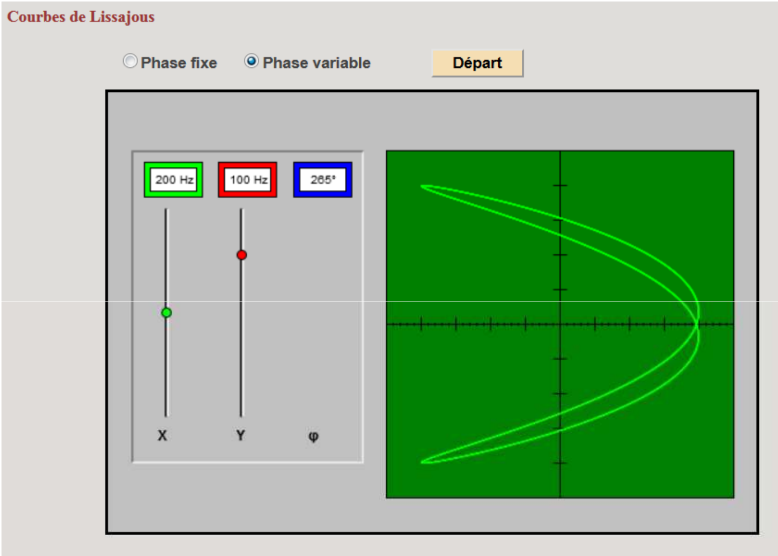
On observe des courbes appelées courbes de Lissajous.

Sur un oscilloscope utilisé en mode XY, on applique sur l'entrée X la tension $X = A\cos(\omega_1 \cdot t)$ et sur l'entrée Y $Y = A\cos(\omega_2 \cdot t - \varphi)$, on observe alors :

Pour $\boxed{\omega_1 = 2\pi \cdot 200}$ $\boxed{\omega_2 = 2\pi \cdot 100}$ $\boxed{\varphi = 160°}$



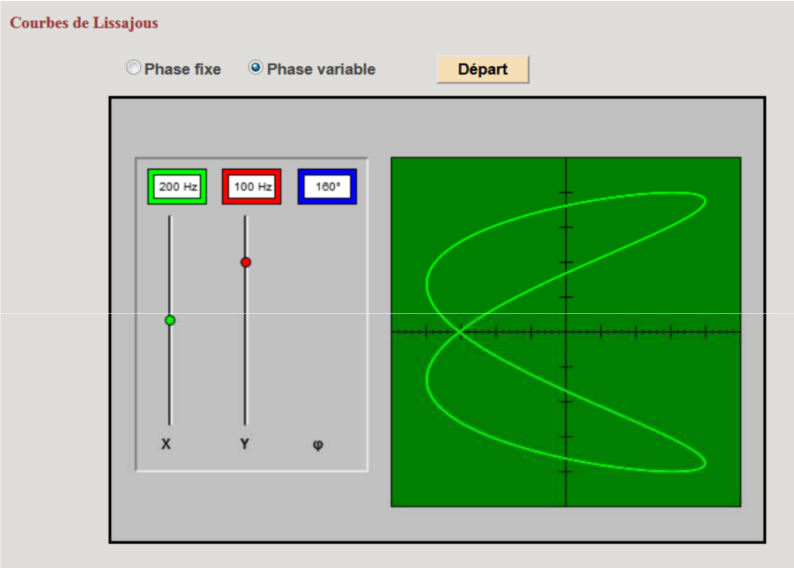
Pour $\boxed{\omega_1 = 2\pi \cdot 200}$ $\boxed{\omega_2 = 2\pi \cdot 100}$ $\boxed{\varphi = 220°}$



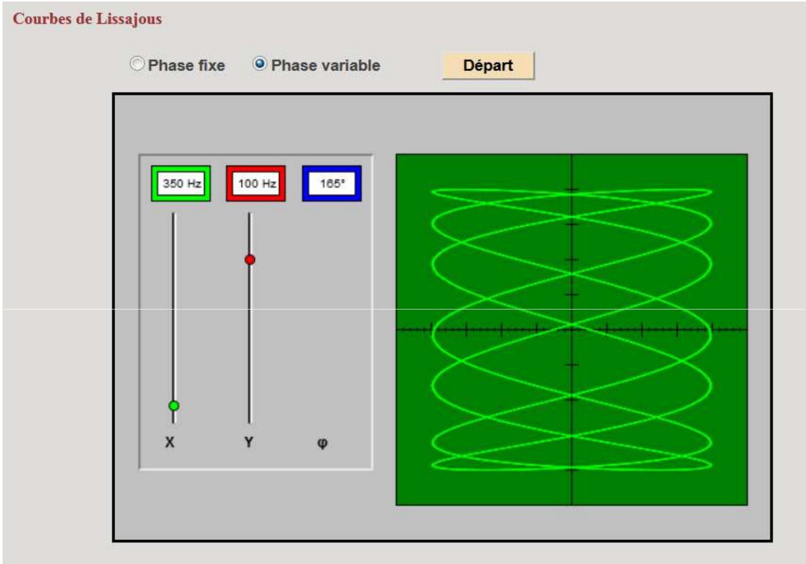
On voit ici l'influence du déphasage sur la forme des courbes de Lissajou

Sur un oscilloscope utilisé en mode XY, on applique sur l'entrée X la tension $X = A\cos(\omega_1 \cdot t)$ et sur l'entrée Y $Y = A\cos(\omega_2 \cdot t - \varphi)$, on observe alors :

Pour $\boxed{\omega_1 = 2\pi \cdot 200}$ $\boxed{\omega_2 = 2\pi \cdot 100}$ $\boxed{\varphi = 160°}$



Pour $\boxed{\omega_1 = 2\pi \cdot 350}$ $\boxed{\omega_2 = 2\pi \cdot 100}$ $\boxed{\varphi = 160°}$



On voit ici l'influence de la différence de fréquence des signaux sur la forme des courbes de Lissajou

FIN