

UNIVERSITÉ ALIOUNE DIOP DE BAMBEY

L'excellence est ma constance, l'éthique ma vertu



UFR SCIENCES APPLIQUÉES ET TIC
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

ANNÉE ACADÉMIQUE : 2019/2020
EC : TOPOLOGIE GÉNÉRALE
RESPONSABLES : FAYE/GAYE

T. D. N° 1 DE TOPOLOGIE GÉNÉRALE ; LICENCE 3 DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1. Enumérer les topologies de l'ensemble $X := \{a, b\}$ à deux points. Lesquelles sont séparées ?

Exercice 2. On munit le sous-ensemble $X := [0, 1] \cup [2, 4[$ de $\mathbb{R}$ de la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

1. La partie $A := [2, 4[$ est-elle ouverte dans l'espace topologique X ?
2. La partie $B := [0, 1]$ est-elle ouverte dans X ? Est-elle fermée dans X ?

Exercice 3. Soit $\mathcal{B} := \{[a, +\infty[: a \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ forme une base pour une topologie $\mathcal{T}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que toute intersection d'ouverts dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ est un ouvert.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'adhérence de $\{x\}$ par rapport à $\mathcal{T}$ est l'intervalle $]-\infty, x]$.

Exercice 4. Les questions suivantes ne sont pas liées.

1. a. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que les boules fermées et les sphères de X sont fermées.
- b. Soient $x \in X$ et r un nombre strictement positif. Montrer que $B(x, r) \subset \overset{\circ}{B_F(x, r)}$ et que $\overline{B(x, r)} \subset B_F(x, r)$. Donner des exemples où les inclusions sont strictes.
- c. Soit A une partie de X . Montrer que l'application $x \in X \mapsto d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y)$ est uniformément continue sur X .
- d. Montrer que $\overline{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$ et $\overset{\circ}{A} = \{x \in X : d(x, X \setminus A) > 0\}$.
2. Montrer que les sphères, dans un espace vectoriel normé (E, N) , sont d'intérieur vide. Est-ce le cas dans un espace métrique quelconque ?

Exercice 5. Soient I un ensemble contenant au moins deux éléments, X un espace topologique et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de X .

1. Montrer que si I est fini, alors $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$, $\overset{\circ}{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overset{\circ}{A_i}$, $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \subset \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$ et que $\bigcup_{i \in I} \overset{\circ}{A_i} \subset \overset{\circ}{\bigcup_{i \in I} A_i}$. Donner des exemples où les inclusions sont strictes.
2. Montrer que si I est infini, alors $\bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \subset \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$ et que $\overset{\circ}{\bigcap_{i \in I} A_i} \subset \bigcap_{i \in I} \overset{\circ}{A_i}$. Donner des exemples où les inclusions sont strictes.

3. On suppose que $\overline{A_i} = X$ pour tout $i \in I$. Montrer que si $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$, alors $\overset{\circ}{A_i} = \emptyset$ pour tout $i \in I$.

Exercice 6. Soient X un espace topologique et A une partie non vide de X .

1. Montrer que $\text{Fr}(\overline{A}) \subset \text{Fr}(A)$ et que $\text{Fr}(\overset{\circ}{A}) \subset \text{Fr}(A)$. Donner des exemples où les inclusions sont strictes.
2. Montrer que A est fermé dans X si et seulement si $\text{Fr}(A) \subset A$.
3. Montrer que A est ouvert dans X si et seulement si $\text{Fr}(A) \cap A = \emptyset$.
4. Montrer que A est ouvert et fermé dans X si et seulement si $\text{Fr}(A) = \emptyset$.
5. Montrer que si A est ouvert ou fermé, alors l'intérieur de $\text{Fr}(A)$ est vide.

Exercice 7. Soit X un ensemble non vide.

1. Montrer que si $\alpha : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ est une application vérifiant les propriétés suivantes :

$$\alpha(X) = X, \alpha(A) \subset A, \alpha(\alpha(A)) = \alpha(A) \text{ et } \alpha(A \cap B) = \alpha(A) \cap \alpha(B) \text{ pour tout } A, B \subset X,$$

alors la famille

$$\mathcal{T} := \{\alpha(A) : A \subset X\},$$

est une topologie sur X telle que $\overset{\circ}{A} = \alpha(A)$ pour tout $A \subset X$.

2. Montrer que si $\beta : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ est une application vérifiant les propriétés suivantes :

$$\beta(\emptyset) = \emptyset, A \subset \beta(A), \beta(\beta(A)) = \beta(A) \text{ et } \beta(A \cup B) = \beta(A) \cup \beta(B) \text{ pour tous } A, B \subset X,$$

alors la famille

$$\mathcal{F} := \{\beta(A) : A \in \mathcal{P}(x)\},$$

est l'ensemble des fermés d'une topologie sur X telle que $\overline{A} = \beta(A)$ pour tout $A \in \mathcal{P}(x)$.

Exercice 8. Soient X un ensemble infini, x_0 un élément de X et

$$\mathcal{F} := \{A \subset X : x_0 \in A\} \cup \{A \subset X : A \text{ est au plus dénombrable}\}.$$

1. a. Montrer que $\mathcal{F}$ est l'ensemble des fermés d'une topologie $\mathcal{T}$ sur X .
b. L'espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est-il séparé ?
2. Soit f une application de X dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est continue sur X si et seulement si $\{x \in X : f(x) \neq f(x_0)\}$ est au plus dénombrable.

Au Travail !