Table des matières

Chapitre 1

Espaces Métriques

1.1 Définitions

Soit E un ensemble non vide

Définition 1.1.1 *On appelle distance la donnée d'une relation* $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *telle que*

1. $d(x, y) = d(y, x)\ \forall x,\ y \in E$
2. $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)\ \forall x, y \in E$ ***Inégalité triangulaire***.

Définition 1.1.2 *Un ensemble non vide* E *muni d'une distance* d *est appelé espace métrique et on note le* (E, d).

Exemple 1.1.1
1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *est un espace métrique :* $d(x, y) = |x - y|$.
2. $\mathbb{C}$ *et le module :* $d(x, y) = |x - y|$
3. $\mathbb{R}^n$ *(ou* $\mathbb{C}^n$*) et la distance euclidienne* $d(x, y) = (\sum |x_i - y_i|^2)^{\frac{1}{2}}$.
4. $\mathbb{R}^n$ *(ou* $\mathbb{C}^n$*) muni de* $d_1(x, y) = \sum |x_i - y_i|$ *ou encore de* $d_\infty(x, y) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$
5. $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), d_\infty)$ *est un espace métrique,* $d_\infty(f, g) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|$
6. $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), d)$ *est un espace métrique,* $d = d_1(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt$ *ou* $d = d_2(f, g) = (\int_0^1 |f(t) - g(t)|^2 dt)^2$.

7. *Il y a une distance discrète défini par*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = y \\ 1 \text{ si } x \neq y \end{cases} \tag{1.1}$$

8. *Dans le cas particulier ou E est un espace K-vectoriel ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathcal{C}$ ou $\mathbb{Q}$) on peut définir une norme sur E notée*

$$\|\cdot\| : \ E \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \longmapsto \|x\|$$

$\|\cdot\|$ *vérifie les trois axiomes suivants*

— $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

— $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \ \forall \lambda \ \in K, \ \forall x \in E$

— $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \forall x, y \in E$

On dit que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

Le espaces vectoriels normés fournissent des exemple très importants d'espaces métriques. En fait si on a une norme alors on a une distance qui lui est associée. Cette distance d est définie par

$$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

9. *Si $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{C})$ alors la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$*

1.2 Distance sur un espace produit

Soit $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p$. (E_i, d_i) des espaces métriques $i = 1, \ldots, p$. Soit $x \in E, \ x = (x_1, \ldots, x_p)$. On note par :

$$\delta_\infty(x,y) = \sup_{i \in \{1,2,\ldots,p\}} d_i(x_i, y_i)$$

$$\delta_1(x,y) = \sum_{i=1}^{p} d_i(x_i, y_i)$$

$$\delta_2(x,y) = \Big[\sum_{i=1}^{p} d_i^2(x_i, y_i) \Big]^{\frac{1}{2}}$$

où

$$\delta_\infty,\ \delta_1,\ \delta_2 : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

Proposition 1.2.1 *$\delta_\infty,\ \delta_1,\ \delta_2$ sont des distances définies sur $E \times E$.*
En plus $\delta_\infty(x,y) \leq \delta_1(x,y);\ \ \delta_1(x,y) \leq p\delta_2(x,y)$ et $\delta_2(x,y) \leq \sqrt{p}\delta_\infty(x,y),\ \forall (x,y) \in E \times E$.

Proof. $\delta_\infty(x,y) = \sup_{i\in\{1,2,\ldots,p\}} d_i(x_i,y_i)$

1. Montrons que $\delta_\infty(x,y) = \delta_\infty(y,x)$?
   $\forall x,y \in E = \pi_{i=1}^p E_i,\ d_i(x_i,y_i) = d_i(y_i,x_i) \Longrightarrow \sup_{i\in\{1,2,\ldots,p\}} d_i(x_i,y_i) = \sup_{i\in\{1,2,\ldots,p\}} d_i(y_i,x_i)$
   donc $\delta_\infty(x,y) = \delta_\infty(y,x)$.

2. $\delta_\infty(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
   $\delta_\infty(x,y) = \sup_{i\in\{1,2,\ldots,p\}} d_i(x_i,y_i) = 0,\ \forall j \in \{1,\ldots,p\},\ 0 \leq d_j(x_j,y_j) \leq \sup_{i\in\{1,2,\ldots,p\}} d_i(x_i,y_i) = \delta_\infty(x,y) = 0$ par hypothèse $\Longrightarrow d_j(x_j,y_j) = 0\ \forall j \in \{1,2,\ldots,p\}$

   $$\Longleftrightarrow x_j = y_j\ \forall j = 1,\ldots,p \Longrightarrow x = y$$

   $\delta_\infty(x,y) = 0 \Longrightarrow x = y$
   Réciproquement

   $$x = y \Longleftrightarrow \forall j \in \{1,\ldots,p\}\ x_j = y_j \Longleftrightarrow d_j(x_j,y_j) = 0 \forall j \in \{1,\ldots,p\}$$

   $$\Longrightarrow \sup_{j\in\{1,\ldots,p\}} d_j(x_j,y_j) = 0 \text{ donc } \delta_\infty(x,y) = 0.$$

3. $\delta_\infty(x,y) \leq \delta_\infty(x,z) + \delta_\infty(z,y)\ \forall x,y,z \in E$

   $$d_i(x_i,y_i) \leq d_i(x_i,z_i) + d_i(z_i,y_i)$$

   car d_i est une distance par hypothèse.

   $$\sup d_i(x_i,y_i) \leq \sup\{d_i(x_i,z_i)+d_i(z_i,y_i)\} \leq \sup d_i(x_i,z_i)+\sup d_i(z_i,y_i),\ \ i \in \{1,\ldots,p\}$$

   donc $\delta_\infty(x,y) \leq \delta_\infty(x,z) + \delta_\infty(z,y)$
   δ_∞ est une distance donc $\left(E = \pi_{i=1}^n E_i, \delta_\infty\right)$ est un espace métrique.

Exercice 1 *Montrer que δ_1 et δ_∞ sont des distances définies sur $E \times E$.*

Montrons que $\delta_\infty(x,y) \leq \delta_1(x,y)$.
$\delta_\infty(x,y) = \sup d_i(x_i,y_i),\ i \in \{1,\ldots,p\}$.
$\delta_1(x,y) = \sum_{i=1}^n d_i(x_i,y_i)$
$\sup\{a_1,\ldots,a_n\} = \sup_{i\in\{1,\ldots,p\}} a_i$. $\exists i_0 \in \{1,\ldots,p\}$ tels que $\sup\{a_1,\ldots,a_n\} = a_{i_0}$; donc $\sup a_i = \max\{a_1,\ldots,a_n\} = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} a_i = a_{i_0}$.
Donc il existe $i_0 \in \{1,\ldots,n\}$ tel que $\delta_\infty(x,y) = d_{i_0}(x_{i_0},y_{i_0})$ donc

$$d_{i_0}(x_{i_0},y_{i_0}) + \sum_{i,\ i\neq i_0} d_i(x_i,y_i) = \sum_{i=1}^p d_i(x_i,y_i) \Longrightarrow \delta_\infty(x,y) \leq \sum_{i=1}^p d_i(x_i,y_i) = \delta_1(x,y).$$

Montrons que $\delta_1(x,y) \leq p\delta_2(x,y)$**.**
On a, pour tout $(x,y) \in E \times E$,

$$\delta_1(x,y) = \sum_{i=1}^p d_i(x_i,y_i), \quad \delta_2(x,y) = \Big\{\sum_{i=1}^p d_i^2(x_i,y_i)\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

Montrons que $\sqrt{a_1+\ldots+a_p} \leq \sqrt{a_1}+\ldots+\sqrt{a_p}$
$a_i = d_i^2(x_i,y_i)$ alors $\delta_2(x,y) \leq \delta_1(x,y)$
On suppose $d_i(x_i,y_i) > 0\ \forall i \in \{1,\ldots,p\}$. Il suffit de prendre $x_i \neq y_i \forall i \in \{1,\ldots,p\}$.

$$\forall j_0 \in \{1,\ldots,p\},\ d_{j_0}(x_{j_0},y_{j_0}) \leq d_{j_0}(x_{j_0},y_{j_0})\Big[1+\frac{1}{d_{j_0}^2(x_{j_0},y_{j_0})}\sum_{i,\ i\neq j_0} d_i^2(x_i,y_i)\Big]^{\frac{1}{2}} = \delta_2(x,y).$$

En effet

$$\Big\{\sum_{i=1}^p d_i^2(x_i,y_i)\Big\}^{\frac{1}{2}} = \Big\{d_1^2(x_1,y_1)+d_2^2(x_2,y_2)+\ldots+d_{j_0}^2(x_{j_0},y_{j_0})+\ldots+d_p^2(x_p,y_p)\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \Big\{d_{j_0}^2(x_{j_0},y_{j_0})\Big[1+\frac{1}{d_{j_0}^2(x_{j_0},y_{j_0})}\sum_{i,\ i\neq j}^p d_i^2(x_i,y_i)\Big]\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= d_{j_0}(x_{j_0},y_{j_0})\Big[1+\frac{1}{d_{j_0}^2(x_{j_0},y_{j_0})}\sum_{i,\ i\neq j}^p d_i^2(x_i,y_i)\Big]\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

Donc
$$\sum_{i=1}^{p} d_i(x_i, y_i) \leq p\delta_2(x, y) \Longrightarrow \delta_1 \leq p\delta_2$$
Montrons que $\delta_2 \leq \sqrt{p}(x, y)\delta_\infty(x, y)$
On a
$$\delta_2 = \Big\{ \sum_{i=1}^{p} d_i^2(x_i, y_i) \Big\}^{\frac{1}{2}}$$
$$d_i^2(x_i, y_i) \leq (\sup_{j \in \{1,\dots,p\}} d_j(x_j, y_j))^2$$
$$\Big(\sum_{i=1}^{p} d_i^2(x_i, y_i) \Big)^{1/2} \leq \Big(p(\delta_\infty(x, y))^2 \Big)^{1/2} \Longrightarrow \delta_2(x, y) \leq \sqrt{p}\delta_\infty(x, y).$$
■

Remarque 1.2.2 $\delta_\infty \leq \delta_1, \ \delta_1 \leq p\delta_2, \ \delta_2 \leq \sqrt{p}\delta_\infty$
$\delta_\infty \leq \delta_1 \leq p\delta_2 \leq p\sqrt{p}\delta_\infty$
$\delta_\infty \leq \delta_1 \leq p\delta_2 \leq p\sqrt{p}\delta_\infty$
$\frac{1}{p}\delta_1 \leq \delta_2 \leq \sqrt{p}\delta_\infty \leq \sqrt{p}\delta_1$.
On dit que les trois normes sont équivalentes.

Définition 1.2.3 *Soient* $d_1 : \ E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+, \ d_2 : \ E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$.
On dit que d_1 *et* d_2 *sont équivalentes si et seulement si* $\exists\, c_1, \ c_2 > 0$ *tels que* $d_1(x, y) \leq c_2 d_2(x, y)$ *et* $d_2(x, y) \leq c_1 d_1(x, y)$.

1.3 Notions d'ouvert et fermé

Définition 1.3.1 *Soit* (E, d) *un espace métrique.*
On appelle boule ouverte de centre a *et de rayon* $r > 0$ *l'ensemble noté*
$$\mathcal{B}(a, r) = \{x \in E : \ d(a, r) < \ r\}.$$
On appelle boule fermée de centre a *et de rayon* $r > 0$ *l'ensemble noté*
$$\mathcal{B}'(a, r) = \{x \in E : \ {}_, d(a, r) \leq \ r\}.$$

Exemple 1.3.1 1. $E = \mathbb{R}^2, \ d(x, y) = d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$
$B(0, 1) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ |x_1| + |x_2| < 1\}$.

2. $E = \mathbb{R}^2,\ d(x,y) = d_2(x,y)$
   $B(0,1) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ x_1^2 + x_2^2 < 1\}$.
3. $E = \mathbb{R}^2,\ d(x,y) = d_\infty(x,y)$
   $B(0,1) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ \sup(|x_1| + |x_2| < 1\}$.

Définition 1.3.2 *Soit (E,d) un epace métrique et U une partie de E. On dit que U est ouvert de (E,d) si pour tout $x \in U$, il existe $r = r(x)$ tel que $\mathcal{B}(x,r) \subset U$.*
On dit que U est fermé de (E,d) si on complémentaire A^c et un ouvert de (E,d).
En particulier $\emptyset$ est à la fois un ouvert et un fermé de (E,d), de même que E.

Proposition 1.3.3 *Soit (E,d) un epace métrique. Une boule ouverte $B(a,r)$ est un ouvert de (E,d). Une boule fermée est un fermé de (E,d).*

Proof. $B(a,r) = \{x \in E :\ d(x,a) < r\}$ Soit $x \in B(a,r)$, soit $\epsilon = r - d(x,a)$. $\epsilon > 0$ car $x \in B(a,r)$. Montrons que $B(x,\epsilon) \subset B(a,r)$. $\forall y \in B(x,\epsilon)$, on a $d(a,y) \leq d(a,x) + d(x,y) < d(a,x) + \epsilon$ (car $y \in B(x,\epsilon)$) i.e. $d(a,y) < r$. Donc $y \in B(a,r)$.
■

Proposition 1.3.4 *Soit (E,d) un epace métrique.*
Toute réunion quelconque d'ouverts est ouverte.
Toute intersection finie d'ouverts est ouverte.
E est ouvert, $\emptyset$ est ouvert, (E,d) espace métrique.

Proof. Soit $V = \cup_{i\in I} V_i,\ V_i$ ouvert, I ensemble d'indices quelconque.
Soit $x \in V$ alors il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in V_{i_0}$. Comme V_{i_0} est un ouvert donc il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset V_{i_0} \subset V$.
Soit $V = \cap_{i=1}^n V_i,\ V_i$ ouvert,
Soit $x \in V$ alors $x \in V_i$ quel que soit $i \in \{1,\ldots,n\}$ Comme V_i est un ouvert donc il existe $r > 0$ tel que $B(x,r_i) \subset V_i$ quel que soit $i \in \{1,\ldots,n\}$ Soit $r = \inf r_i > 0$ donc $B(x,r) \subset V_i$ quel que soit $i \in \{1,\ldots,n\}$ donc $B(x,r) \subset \cap_{i=1}^n V_i$.
■

Proposition 1.3.5 *Soit (E,d) un epace métrique.*
Si pour tout $i \in I$, F_i est un fermé, alors $\cap_{i\in I} F_i$ et un fermé
Si $F_1,\ldots F_n$ sont de fermés, alors $\cup_{p=1}^n F_p$ et encore un fermé.

Définition 1.3.6 ***Voisinages***
Soit $A \subset E,\ A \neq \emptyset$. On dit que A est un voisinage de $a \in E$ s'il existe un ouvert O de (E,d) tel que $a \in O$ et $O \subset A$.

Exemple 1.3.2 *Soit $a \in E,\ B(a,r)$ est un voisinage ouvert de a quel que soit $r > 0$.*
V est un voisinage de A s'il existe U un ouvert tel que $A \subset U \subset V$.

Exemple 1.3.3 *(E,d) un espace métrique, E un ensemble discret les ouverts de E sont les ensembles des parties de $E = \mathcal{P}(E)$.*
Soit $B \subset E,\ \mathcal{B}(a, \frac{1}{2}) = \{a\}$
Soit $a \in E$ donc $\{a\}$ est un ouvert dans E, $B = \cup_{a \in B}\{a\}$ est un ouvert.

Définition 1.3.7 *$x \in E,\ (E,d)$ espace métrique $A \subset E,\ A \neq \emptyset$.*

$$d(x,A) = \inf_{y \in A} d(x,y).$$

$x \in A$ alors $d(x,A) = 0$.
Si $d(x,A) = 0$ cela n'implique pas forcément que $x \in A$.
On appelle diamètre de A et on note

$$\delta(A) = \sup_{x \in A,\ y \in A} d(x,y)$$

A est bornée si et seulement $\delta(A) < +\infty$.

1.4 Topologie sur un ensemble

Définition 1.4.1 *On appelle topologie sur un ensemble E non vide un ensemble de parties de E noté $\mathcal{O}$ (sous ensemble de $\mathcal{P}(E)$) vérifiant*

1. *$\mathcal{O}$ stable par réunion quelconque*

2. *$\mathcal{O}$ est stable par intersection finie.*

3. *E et $\emptyset \in \mathcal{O}$.*

Les éléments de $\mathcal{O}$ sont appelés ouverts et les complémentaires des ouverts sont appelées fermés. Le couple $(E, \mathcal{O})$ est appelé espace topologique.

Exemple 1.4.1 *1. Soit E un ensemble. Alors $\mathcal{O} = \{\emptyset; E\}$ est une topologie sur E, parfois appelée topologie grossière.*

2. Si l' on prend pour $\mathcal{O}$ l' ensemble de toutes les parties de E, on obtient également une topologie, appelée topologie discrète.

3. Soit (E, d) un espace métrique. L' ensemble des ouverts de E pour la métrique d est une topologie :
L'ensemble $\mathcal{T}$ ou $\mathcal{T}_d$ des sous ensembles ouverts de (E, d) s'appelle la topologie associée à (E, d), ou induite par d sur E.

$$\mathcal{T}_d = \{O \subset E : O \text{ est un ouvert de } (E, d)\}.$$

Remarque 1.4.2 *Des distances d_1 et d_2 différentes peuvent induire des topologies identiques : $d_1 \neq d_2$ et $T_{d_1} = T_{d_2}$. On dit que les distances sont topologiquement équivalentes.*
Deux distances métriquement équivalentes sont topologiquement équivalentes.

Exercice 2 $\mathcal{O} = \Big\{E,\ \emptyset\Big\}$ *est une topologie grossière*
$\mathcal{O} = \Big\{E, \mathcal{P}(E)\Big\}$ *topologie discrète.*

Définition 1.4.3 *Soit E un ensemble et $\mathcal{O}_1$,$\mathcal{O}_2$ deux topologies sur E. On dit que $\mathcal{O}_1$ est plus fine (ou plus forte) que $\mathcal{O}_2$ si $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$. Ainsi, la topologie discrète est la plus fine et la topologique grossière, la moins fine de toutes les topologies.*

Définition 1.4.4 *On dit qu'un espace topologique $(E, \mathcal{O})$ est séparé si pour tout couple (x, y) de points distincts de E, il existe un voisinage V de x et un voisinage V de y tels que $V \cap U = \emptyset$.*

Remarque 1.4.5 *Tout espace métrique est séparé.*
Soit E un ensemble contenant au moins deux éléments et muni de la topologie grossière $\{\emptyset; E\}$. Alors $(E, \mathcal{O})$ n'est pas séparè.
Un ensemble muni de la topologie discrète est toujours séparé. En effet, tout singleton est un voisinage.

Proposition 1.4.6 *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique et $A \subset E$. L' ensemble $\mathcal{O}_A$ des parties Ω de A telles qu' il existe $U' \in \mathcal{O}$ vérifiant $\Omega = U' \cap A$ est une topologie sur A. On l' appelle topologie induite par $\mathcal{O}$ sur A.*

Remarque 1.4.7 *Attention : $A \subset E$ mais $\mathcal{O}_A \subset \mathcal{O}_E$. en général. Autrement dit, il y a des ouverts de A qui ne sont pas des ouverts de E. On a $\mathcal{O}_A \subset \mathcal{O}_E$ si et seulement si A est un ouvert de E.*

Exemple 1.4.2 $([0,1], \mathcal{O}_{[0,1]}) \hookrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\mathbb{R}})$*, mais les ouverts de $[0,1]$ contiennent (entre autres) les intervalles de types $[0,\alpha[$ et $]\beta,1]$ qui ne sont pas des ouverts de $\mathbb{R}$.*

Remarque 1.4.8 *Les ouverts de la topologie induite sur A par la topologie de E sont donc les intersections des ouverts de E avec A. Par passage au complémentaire, on vérifie facilement que les fermées de A sont aussi les intersections des fermés de E avec A.*

Exemple 1.4.3 *L'intervalle $[0,1[$ est un ouvert de $[0,2]$ muni de la topologie induite par $\mathcal{T}_u$, car $[0,1[=]-1,1[\cap[0,2]$ et $]-1,1[\in \mathcal{T}_u$. Noter que $[0,1[$ est aussi un fermé de $[-1,1[$ muni de la topologie induite par $\mathcal{T}_u$ car $[0,1[= [0,4] \cap [-1,1[$ avec $[0,4]$ fermé de $\in \mathcal{T}_u$. En revanche, $[0,1[$ n'est ni ouvert ni fermé dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$.*

Exercice 3 (E,d) *espace métrique. Les ouverts de $\mathcal{O}$ sont obtenus par réunion dans les boules ouvertes de E.*

Exercice 4 $(E,\leq)$ *totalement ordonné. Si on considère les intervalles ouverts $]a,b[$ la topologie réunion quelconque d'intervalles ouverts est appelée la topologie de l'ordre.*

Définition 1.4.9 *La donnée $(E,\mathcal{O})$ est appelée espace topologique.*

1.5 Notions de point intérieur

Soit (E,d) un espace métrique, soit $A \subset E,\ A \neq \emptyset$.

Définition 1.5.1 *x est intérieur à A s'il existe $r > 0$ tq $B(x,r) \subset A$. On note $\mathring{A} = \{$points intérieurs à $A\} \subset A$. $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A. On appelle $\mathring{A}$ l'intérieur de A.*

Exemple 1.5.1 *Si $E = \mathbb{R}$ et $A = \mathbb{Q}$, $\mathring{A} = \emptyset$.*

Proposition 1.5.2 *1. A est un ouvert si et seulement $A = \mathring{A}$.*

2. $A \subset B \implies \mathring{A} \subset B^0$.

3. L'intérieur de $A \cap B$ *est égale à* $\mathring{A} \cap B^0$.

Remarque 1.5.3 *L'intérieur de* $A \cup B$ *est différent de la réunion des intérieurs de* A *et* B*. mais l'intérieur de* $A \cup B$ *contient l'intérieur de* A *union l'intérieur de* B.

Exemple 1.5.2 *Pour s'en rendre compte considérer les ensembles suivants* $A = \mathbb{Q},\ B = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

Proof. de la proposition.
$\implies$ A ouvert $A \subseteq A$ donc A est le plus grand ouvert contenant A. Ce qui entraine $\mathring{A} = A$.
$\impliedby$ $\mathring{A} = A$ comme $\mathring{A}$ est un ouvert donc A l' est aussi.
$\mathring{A} \subseteq A \subset B \Longrightarrow \mathring{A} \subset B$
Il faut montrer $\forall z \in \mathring{A},\ z$ appartient à l'intérieur de B. $z \in \mathring{A} \implies \exists\, r > 0$ tel que $B(z, r) \subset A$.
Pour montrer que z appartient à l'intérieur de B on doit : $\exists\,?\ r > 0$ tel que $B(z, r_1) \subset B$
Mais il existe $B(z, r) \subset A$ car $A \subset B$ par hypothèse donc $B(z, r) \subset B,\ r = r_1$ convient. Donc
à suivre
■

1.6 Notions de suites convergentes

On introduit la notion de suite dans E ou (E, d) est un espace métrique.

$$I \subset \mathbb{N} \longrightarrow E$$

$$n \longmapsto x_n$$

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dans E.

Définition 1.6.1 (E, d) *est un espace métrique.*
Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de* E*. On dit que la suite* (x_n) *converge vers* $x \in E$ *sssi*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} :\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ n \geq N, \rightarrow d(x_n, x) \leq \epsilon.$$

EN d'autre termes, x_n *converge vers* x *dans* E *si et seulement si* $d(x_n, x) \rightarrow 0$ *lorsque* $n \rightarrow +\infty$.

Unicité de la limite
On suppose $x_n \to x$ et $x_n \to y$ donc $0 \leq d(x,y) \leq d(x,x_n) + d(x_n,y)$ donc $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

$x_n \longrightarrow x$ lorsque $n \to +\infty \Longleftrightarrow \forall \mathcal{V}$ voisinage ouvert de x, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0,\ x_n \in \mathcal{V}$.

Proposition 1.6.2 *fondamentale*
Soit (E,d) un espace métrique. Soit $F \subset E$. F est fermé dans $E \Longleftrightarrow$ pour toute suite (x_n) de F qui converge vers x dans E alors $x \in F$.

Proof. $\Longrightarrow$ Soit F fermé et $(x_n) \subset F;\ x_n \to x,\ x \in F$.
Si x n'appartient pas F alors $x \in E \backslash F$ qui est un ouvert donc il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset E\backslash F \Longrightarrow B(x,r) \cap F = \emptyset$ donc $d(x_n, x) \geq r > 0$. Ce qui entraine que x_n ne tend pas vers x. Ce qui est impossible.
$\Longleftarrow$ Par l'absurde on suppose $E\backslash F$ n'est pas ouvert. Il existe $x \in E\backslash F$ tel que $\forall r > 0$ $B(x,r)$ n'est pas inclu dans $E\backslash F$ ie $B(x,r) \cap F \neq \emptyset$. On prend $r = 1/n$ $\exists x_n \in B(x, 1/r) \cap F$. $x_n \in F,\ d(x_n, x) < 1/n$, donc
$x_n \to x \in F$. Par hypothèse $x \in F$ Contradiction.. ■

1.7 Valeur d'adhérence

Définition 1.7.1 *Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E,\ A \neq \emptyset$.*
$x \in E$ est adhérent à A si $\forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset$.
Ceci est équivalent à dire que $\exists$ une suite (x_n) dans A qui converge vers x.
Ce qui encore est équivalent à $d(x,A) = 0$.
On note par $\overline{A} = \{points\ adhérents\ à\ A\} \supset A$.
$\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.
x n'appartient pas à $\overline{A}$ équivaut à $\exists r > 0$ $B(x,r) \cap A = \emptyset$ ie $B(x,r) \subset E\backslash A \Longrightarrow x$ est intérieur à $E\backslash A$.
$\mathcal{C}\overline{A} = int(\mathcal{C}A)$
$\mathcal{C}(int\, A) = \overline{\mathcal{C}\, A}$.

Proposition 1.7.2 *Soit $A \subset E$.*

1. *A fermé $\Longleftrightarrow A = \overline{A}$.*

2. *$A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.*
3. *$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$*

4. $\bar{A} = \cap_{F \text{ fermé},\, A \subset F} F$
5. $\bar{A}$ *est un fermé contenant* A

Définition 1.7.3 *Soit* (E, d) *un espace métrique et soit* $A \subset E$. A *est dense dans* E *sssi* $\overline{A} = E$.

Définition 1.7.4 *Soit* (E, d) *un espace métrique et soit* $A \subset E$. *La* ***frontière*** *de* A *est l'ensemble des points* $x \in E$ *tel que* $\forall \epsilon > 0$, $B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$ *et* $B(x, \epsilon) \cap A^c \neq \emptyset$. *La frontière de* A *est notée* $fr(A)$ *ou* ∂A.

Définition 1.7.5 *La frontière de* A, $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{\mathcal{C}A}$.
$E = \overline{A} \cup int(\overline{\mathcal{C}A}) \cup Fr(A)$.

Définition 1.7.6 *Soit* $A \subset A$ *et* $a \in E$. *On dit que* a *est un point* ***isolé*** *de* A *si* $a \in A$ *et il existe* $\epsilon > 0$ *tel que* $B(a, \epsilon) \cap A = \{a\}$.
On dit que a *est un point d'****accumulation*** *de* A *si* $\forall\, \epsilon > 0$, $B(a, \epsilon) \cap A$ *contient au moins deux points.*

Définition 1.7.7 ***valeur d'adhérence***
Soit $a \in E$ *où* (E, d) *est un espace métrique.* a *est une valeur d'adhérence de la suite* (x_n) *si pour tout voisinage ouvert* U *de* a *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$ $\exists p_n \geq n$ $(p_n \in \mathbb{N})$ *tel que* $x_{p_n} \in U$.
Pour une limite $x_n \to a$, $\forall U$ *voisinage de* a, $\exists\, n_0$ *tel que pour tout* $n \geq n_0$ *alors* $x_n \in U$.
Si (x_n) *admet une limite* a, a *est une valeur d'adhérence.*

Rappel : suite extraite de la suite x_n
C'est donnée de $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante $(n, \varphi(n))$ suite extraite.

Proposition 1.7.8 *Soit* (E, d) *un espace métrique et soit* (x_n) *une suite dans* E. a *est une valeur d'adhérence de* (x_n) $\iff$ *il existe une suite extraite* $(x_{\varphi(n)})$ *qui converge vers* a.

Proof. $\Longleftarrow$ (u_n) une suite dans E, $x_{\varphi(n)} \to a$ lorsque $n \to +\infty$, U voisinage de a $\exists r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$.
Comme $x_{\varphi(n)} \to a$ $\exists n_0$ tel que $\forall n \geq n_0$ $x_{\varphi(n)} \in B(a, r)$.
$\Longrightarrow$ (x_n) une suite de E, a une valeur d'adhérence.
$\forall r > 0$, $\forall n$ $\exists p_n > n$ tq $x_{p_n} \in B(a, r)$.
On fait une récurrence

$r = 1,\ n = 1,\ ,\exists p_1 \geq 1$ tq $d(a, x_{p_1}) \leq 1$;
$r = \frac{1}{2},\ n = 2\ \exists p_2 \geq p_1 + 1,\ d(a, x_{p_2}) \leq \frac{1}{2}\varphi(2) = p_2$.
$r = \frac{1}{n},\ \exists p_n \geq p_{n-1},\ d(a, x_{p_n}) \leq \frac{1}{n}\varphi(n) = p_n$
$r = \frac{1}{n+1},\ \exists p_{n+1} \geq p_n + 1,\ d(a, x_{p_{n+1}}) \leq \frac{1}{n+1}\varphi(n+1) = p_{n+1}$.
φ strictement croissante, $d(a, x_{\varphi(n)}) < \frac{1}{n}$.
■

Remarque 1.7.9 *Si (x_n) est une suite convergente, elle admet une seule valeur d'adhérence. (La réciproque est fausse).*

Proof. $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\ \varphi$ croissante. On suppose x_n converge vers a. $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0$ tel que $\forall n \geq n_0 \Longrightarrow d(a, x_n) < \epsilon$. Pour $n \geq n_0$ la réciproque est fausse. On prend le contre exemple suivant

$$x_n = \begin{cases} 1 \text{ si n est pair} \\ n \text{ si n est impair} \end{cases} \tag{1.2}$$

dans $\mathbb{R}$.
x_n a une valeur d'adhérence qui est 1. Si on est dans $\overrightarrow{\mathbb{R}}$ x_n a deux valeurs d'adhérence 1 et ∞. ■

Visite chez les suites réelles

Soit (x_n) une suite de réels, soit $l = \lim_{n\to+\infty} \sup x_n,\ l \in \mathbb{R}$.
On va montrer que l est la plus grande valeur d'adhérence de (x_n) dans $\mathbb{R}$.
$\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ avec $l \in]\alpha,\ \beta[$ avec $x_n < \beta$ pour $n \geq n_0$ et $x_n > \alpha$ pour une infinité d'indices.
Donc $\forall n,\ \exists p_n \geq n$ tel que $x_{p_n} \in]\alpha,\ \beta[$ donc l est une valeur d'adhérence. Soit $l' \in \mathbb{R},\ l' > l$. On suppose que l' est valeur d'adhérence de la suite (x_n).
Soit $l < \alpha' < l' < \beta',\ x_n \geq \alpha'$ pour un nombre fini d'indices.
C'est une contradiction avec le fait que l'on suppose l' être une valeur d'adhérence.
Donc l ne peut pas être une valeur d'adhérence.
Pour les suites réelles : il y a éventuellement deux valeurs d'adhérence qui sont $\limsup x_n$ et $\liminf x_n$ et ensuite il faut en chercher s'il existe entre $\limsup x_n$ et $\liminf x_n$.
$\lim_{n\to+\infty} \inf x_n$ est la plus petite valeur d'adhérence. Si $x_n \to a$ alors et $\lim_{n\to+\infty} \sup x_n = \lim_{n\to+\infty} \inf x_n$.
Si $\lim_{n\to+\infty} \sup x_n = \lim_{n\to+\infty} \inf x_n = l$ alors $x_n \to l$ lorsque $n \to +\infty$.
En effet $\forall \epsilon > 0,\ l - \epsilon < x_n < l + \epsilon$ pour $n \geq n_0 \Longrightarrow |x_n - l| < \epsilon$ pour $n \geq \max\{n_0, n\}$.

Rappel : Limite supérieure, limite inférieure
Soit $(u_n),\ u_n \in \mathbb{R}$. Soit

$$U_n = \sup_{k \geq n} u_k = \sup\{u_k :\ k \geq n\}$$

$$V_n = \inf_{k \geq n} u_k = \inf\{u_k :\ k \geq n\}$$

1. $u_n = +\infty\ \forall n \Longleftrightarrow (u_n)$ est une suite non bornée $\Longrightarrow U_n$ non majorée.
2. $u_n \in \mathbb{R}$ Etudier u_n (sa convergence).
   $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ comme $u_k \leq U_k\, \forall k$ on a $u_k \to -\infty$
   $\lim_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$
   $\forall\, \epsilon > 0,\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ |u_n - l| < \epsilon$
   $|\sup_{k\geq n} u_k - l| < \epsilon$
   $l - \epsilon < \sup_{k\geq n} u_k < l + \epsilon$ dès que $n > n_0$.
   $\forall \alpha,\ \beta$ tels que $\alpha < l < \beta,\ \exists n_0$ tel que $\alpha < u_n < \beta\ \forall n \geq n_0$.
   $U_n < \beta \Longrightarrow u_n < \beta,\, \forall n \geq n_0;$
   $U_n > \alpha \Longrightarrow p_n \in \mathbb{N} :\ U_n \geq u_{p_n} > \alpha\, (n \geq n_0)$
   $\mathrm{card}\{n :\ x_n > \beta\} < +\infty$(fini)
   $\mathrm{card}\{n :\ x_n < \alpha\} = +\infty$(infini)

1.8 Sous espaces métriques

Soit (E, d) un espace métrique et soit $F \subset E,\ F \neq \emptyset$, la restriction de d pour $F = d_{/F}$ est une distance sur F. (F, d_F) est un espace métrique ou (F, d) est un sous espace métrique de E.

Proposition 1.8.1 *On dira que U est ouvert dans $F \Longleftrightarrow \exists A$ ouvert de E tel que $U = A \cap F$.*

Proof. $\Longrightarrow$ Soit $x \in U$ $\exists r(x) > 0$ tel que $\underbrace{B_F(x, r(x))}_{\{y\in F:\, d_F(x,y)<r(x)\}} \subset U$

$$B_F(x, r(x)) = B_E(x, r(x)) \cap F$$

$$U = \cup_{x\in U} B_F(x, r(x)) = \cup_{x\in U}\Big(B_E(x, r(x)) \cap F\Big) = \Big(\cup_{x\in U}\, B_E(x, r(x))\Big) \cap F$$

$\Longleftarrow$ Soit $x \in U$, $U = A \cap F \Longrightarrow x \in A$ où A est un ouvert de E donc $\exists\, r(x) > 0$ tel que $B_E(x, r(x)) \subset A$.

$$B_F(x, r(x)) = B_E(x, r(x)) \cap F \subset U$$

donc U est un ouvert.
Commentaire
Soit F ouvert dans E,
U ouvert dans $F \Longrightarrow U$ ouvert dans E
$\Updownarrow$
$\exists A$ ouvert de E tel que $U = A \cap F \Longrightarrow U$ ouvert dans E.
On n'a pas F ouvert dans E et U ouvert dans F, U peut ne pas être ouvert dans E. ■

Exemple 1.8.1 $E = \mathbb{R},\ F = \mathbb{Z}$,
$U = \{n_0\}$ est un ouvert dans $\mathbb{Z}$, en effet $\{n_0\} = B_{\mathbb{R}}(n_0, \frac{1}{2}) \cap \mathbb{Z}$; U est un fermé de $\mathbb{R}$.

Proposition 1.8.2 *(E, d) est un espace métrique, $F \subset E$. Soit $V \subset F$, V fermé dans $F \Longleftrightarrow \exists A$ fermé dans E tel que $V = A \cap F$.*

Proof. exercice ■
Commentaire
(H1) V fermé dans F
(H2) F fermé dans E
Alors V est fermé dans E.
Exemples de représentations de boules
$E = \mathbb{R}^2$
$B_1(0,1) = \{x \in E : \ \delta_1 < 1\},\ \delta_1(x) = \sum_{i=1}^{2} |x_i|,\ x = (x_1, x_2)$.
$B_2(0,1) = \{x \in E : \ \delta_2 < 1\},\ \delta_2(x) = \left(\sum_{i=1}^{2} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},\ x = (x_1, x_2)$.
$B_\infty(0,1) = \{x \in E : \ \delta_\infty < 1\},\ \delta_\infty(x) = \sup(|x_1|, |x_2|)$.
Représentation de $B_2(0,1)$

$$\delta_2(x) = 1 \longleftrightarrow \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1$$

Représentation de $B_1(0,1)$

$$\delta_1(x) = 1 \longleftrightarrow |x_1| + |x_2| = 1$$

$x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0 \quad x_1 + x_2 = 1$
$x_1 \geq 0$ et $x_2 \leq 0 \quad x_1 - x_2 = 1$
$x_1 \leq 0$ et $x_2 \geq 0 \quad -x_1 + x_2 = 1$
$x_1 \leq 0$ et $x_2 \leq 0 \quad -x_1 - x_2 = 1$

Représentation de $B_\infty(0,1)$

$$\delta_\infty(x) = 1 \longleftrightarrow |x_1| = 1 \text{ ou } |x_2| = 1$$

ie $x_1 = 1$ ou $x_1 = -1$ $\quad x_2 = 1$ ou $x_2 = -1$ Ce qui donne $-1 \leq x_2 \leq 1$ et $-1 \leq x_1 \leq 1$.

1.9 Applications continues

Une notion essentielle que l'on définit au moyen d'ouverts est celle de continuité d'un application topologique dans un autre.

Définition 1.9.1 *Soient (E, P_E) et (F, P_F) deux espaces topologiques. Une application f de E dans F est dite continue sur E si l'image réciproque par f d'un ouvert quelconque de F est un ouvert de E.*

Exemple 1.9.1

1. *Si E est un espae discret, toute application de E dans un espace topologique est continue.*
   Si F est grossier, toute application d'un espace topologique dans F est continue.
2. *Toute application constante d'un espace topologique $(E, \mathcal{P})$ dans un autre est continue : l'image réciproque d'une partie quelconque(en particulier ouverte) est $\emptyset$ et E.*
3. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'application t_a de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $t_a(x) = x + a$ est continue. En effet tout ouvert $O \in \mathcal{T}_u$ s'écrit sous la forme $O = \cup_{i\in I}]\alpha_i, \beta_i[$ où pour tout $i \in I$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\beta_i \in \mathbb{R}$ et $\alpha_i < \beta_i$. On a donc*

   $$t_a^{-1}(\cup_{i\in I}]\alpha_i, \beta_i[) = \cup_{i\in I} t_a^{-1}(]\alpha_i, \beta_i[) = \cup_{i\in I}]\alpha_i - a, \beta_i - a[.$$

   Ainsi, $t_a^{-1}(O) \in \mathcal{T}_u$ et t_a continue.

Définition 1.9.2 *Soient (E, P_E) et (F, P_F) deux espaces topologique, f une application de E dans F et x un point de E. On dit que f est continue au point x si pour tout voisinage V de $f(x)$, il existe un voisinage Ude x tel que $f(U) \subset V$. De manière équivalente, f est continue au point x si pour tout voisinage V de $f(x)$, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x.*

Soit $f : E \to E'$, (E, d) un espace métrique. (E', d') un espace métrique.

Définition 1.9.3 *On dira que f est continue en $a \in E$ si pour tout voisinage ouvert U^1 de $f(a) \in E'$, il existe U voisinage ouvert de a dans E tel que $f(U) \subset U'$.*

Définition 1.9.4 $\forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha > 0$ *tel que* $\forall x :\ d(x,a) < \alpha \Longrightarrow d'(f(x), f(a)) < \epsilon$ *ie* $f(B_E(a,\alpha)) \subset B_{E'}(f(a), \epsilon)$.

Propriété fondamentale
f est continue en $a \in E \Longleftrightarrow$ pour toute suite (x_n) qui converge vers a alors $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.
Proof. $\Longrightarrow)$,$x_n \to a$ d'aprés la definition précedente $\exists n_0$ tel que $\forall n \geq n_0$, ,$d(x_n, a) < \alpha \Longrightarrow d'(f(x_n), f(a)) < \epsilon$ donc $f(x_n) \to f(a)$.
$\Leftrightarrow$) Par l'absurde $\exists U'$ voisinage de $f(a)$ tel que $\forall U$ voisinage ouvert de a, $f(U) \subset U'$.
Soit $U = B(a, \frac{1}{n})$ alors $\exists x_n \in U$ tel que $f(x_n)$ n'appartient pas à U
$d(a, x_n) < \frac{1}{n}$ donc $x_n \to a$ et $f(x_n) \in C_E U'$ qui est fermé dans E', or $f(x_n) \to f(a)$.
Comme $C_E U'$ est ouvert donc $f(a) \in C_E U'$ ce qui est impossible. ■

Définition 1.9.5 *f continue sur E si f est continue en tout point de E.*

Remarque 1.9.6 *U ouvert n'entraine pas que $f(U)$ ouvert, f continue.*

Contre exemple
$E = E' = \mathbb{R},\ U =]-1, 1[,\ ,f(x) = x^2$.
$f(U) = [0, 1[$ qui est ni ouvert ni fermé.

Proposition 1.9.7
1. *f continue sur E.*
2. *$\forall U'$ ouvert dans E', $f^{-1}(U')$ est ouvert dans E.*
3. *$\forall F$ fermé dans E', $f^{-1}(F)$ est fermé dans E.*

Proof. 1. $\Longrightarrow$ 3. il faut utiliser $f^{-1}(CU') = Cf^{-1}(U')$
3. $\Longrightarrow$ 2. utiliser la première définition sur une application continue. $\exists V$ voisinage ouvert de x tel que $f(V) \subset U' \Longrightarrow V \subset U$. Donc $x \in U \Longrightarrow U$ est un ouvert.
2. $\Longrightarrow$ 1. $x \in E, U'$ un voisinage ouvert de $f(x), ; U = f^{-1}(U')$ ouvert contenant $x \longrightarrow f(U) \subset V'$. ■

Exemple 1.9.2 $E = E' = \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1\, , Si\ x \in \mathbb{Q} \\ 0\ si\ x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases} \tag{1.3}$$

$f_{/\mathbb{Q}}(x) = 1 \Longrightarrow f$ *continue sur* $\mathbb{Q}$.
$f_{/\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}(x) = 0 \Longrightarrow f$ *continue sur* $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Définition 1.9.8

1. *Une application f est ouverte si l'image directe de tout ouvert par f est un ouvert.*
2. *Une application f est fermée si l'image directe de tout fermé par f est un fermé.*
3. *Il n'esiste pas de lien en général entre les notions d'applications ouverts, fermées et continues.*

Application

$f,\, g:\ E \to E'$ continues $F = \{x \in E:\ f(x) = g(x)\},\ F$ est fermé dans E.
Si $\exists A$ sous ensemble dense dans E tel que $f(x) = g(x)$
$x \in A \Longrightarrow f(x) = g(x),\ \forall x \in E$.
$f,\, g:\ E \to \mathbb{R}$

$$F = \{x \in E:\ f(x) \leq g(x)\}\ \text{ est fermé dans } E.$$

$$\{x \in E:\ f(x) < g(x)\}\ \text{ est ouvert dans } E.$$

Proof. Soit x_n une suite de $F,\ x_n \to x$ dans E. Par continuité $f(x_n) \to f(x)$ et $g(x_n) \to g(x)$. Et commme $f(x_0) = g(x_0) \Longrightarrow f(x) = g(x)$. Donc $x \in F$.

$F = \{x \in E:\ f(x) \leq g(x)\},\ F$ est fermé $F \supset A$.
Si A est dense dans E alors $\bar{A} = E$.
$A \subset F \longrightarrow \bar{A} \subset \bar{F} = F$, donc $F = E$.

On pose $h(x) = g(x) - f(x)$
$F = h^{-1}([0, \infty[),\ h$ continu ce qui entraine F fermé.
$U = h^{-1}(]0, \infty[),\ h$ continu ce qui entraine U ouvert.

■

$(E, d),\ ,(E', d'),\ (E", d")$ des espaces métriques.
$f : E \to E',\ g : E' \to E"$

Soient f et g des fonctions continues alors gof est continue
Soit $f : E \to E'$
f est uniformément continue si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 :\ \forall x,\, y \in E,\ \ , d(x,y) < \alpha \Longrightarrow d'(f(x), g(x)) < \epsilon.$$

Exemple 1.9.3 *L'application lipschitzienne $k \geq 0$;*

$$d'(f(x), g(x)) \leq k d(x,y)\, ,\forall x, y \in E.$$

L'uniforme continuité est stable par composition ;
f uniforme continuue $\longrightarrow$ f continue mais la réciproque est fausse ;

1.9.1 Homéomorphismes

Soit $f : E \to E'$ une application.

Définition 1.9.9 *f est homéomorphisme de E sur E' si*
1) f est une bijection
2) f et f^{-1} sont continues (ie bicontinue).
On dit aussi que E et E' sont homéomorphes.

Exemple 1.9.4 *Soit E, muni de deux distances $d_1,\ d_2$*

$$I :\ (E, d_1) \to (E, d_2)$$
$$x \to x$$

Si I est bicontinue, les distances d_1 et d_2 sont équivalentes ; (E, d_1) et (E, d_2) ont les mêmes ouverts en d'autres termes ils définissent la même topologie. Toute suite $((x_n)$ de E qui converge au sens de d_1 converge au sens de d_2 et inversement.
Si d_1 est une distance sur $\mathbb{E}$

$$d_2(x,y) = \frac{d_1(x,y)}{1 + d_1(x,y)}$$

d_1 et d_2 sont équivalentes.

1.9.2 Limite d'une application en un point

Définition 1.9.10 *Soient* $(E, \mathcal{O}_1)$ *et* $(F, \mathcal{O}_2)$ *deux espaces topologiques,* A *une partie de* E *et* f *une application de* A *dans* F/ *Soient* $a \in \bar{A}$ *et* $l \in F$. *On dit que* f *a pour limite* l *lorsque* x *tend vers* a *au point* a, *si pour tout voisinage* V *de* l *il existe un voisinage* U *de* a *dans* E *tel que* $f(A \cap U) \subset V$. *Lorsque la limite existe et est unique, on note* $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

Soit (E, d), (F, d') un espace métrique $A \subset E$, $A \neq \emptyset$. Soit $f : A \to F$ une application et soit $a \in \bar{A}$.

Définition 1.9.11 f *admet une limite* l *quand* $x \to a$, $x \in A$ *sssi*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A;\ d(x, a) < \alpha, \Longrightarrow d'(f(x), l) < \epsilon.$$

Définition 1.9.12 U' *voisinage ouvert de* l *dans* E', $\exists U$ *voisinage ouvert de* a *dans* E *tel que tel que* $f(U \cap A) \subset U'$.

Exemple 1.9.5 $E = \bar{\mathbb{R}}$, $, A = \mathbb{N}$, $f(n)$ *suite,* $\lim_{n \to +\infty} f(n)$

1.10 Exercices

Espaces topologiques

Si A est un sous-ensemble de E, on notera $A^c = E - A$ son complémentaire.

Exercice 1.10.1 *1)*
Enumérer les topologies de l'ensemble $E = \{a, b\}$. *Lesquelles sont séparées ?*

Exercice 1.10.2 *Soit l'ensemble* $E = \{a, b, c\}$ *muni d'une topologie. Montrer que si les singletons* $\{a\}$, $\{b\}$, *et* $\{c\}$ *sont ouverts dans* E, *alors* E *est discret (c'est à dire que la topologie sur* E *est la topologie discrète).*

Exercice 1.10.3 *Topologie sur* $\mathbb{R}^2$. *1. (topologie usuelle). On appelle ouvert (usuel) de* $\mathbb{R}^2$, *une réunion de produits d'intervalles ouverts (c'est á dire de la forme* $]a, b[\times]c, d[$). *Montrer que ces ouverts forment une topologie sur* $\mathbb{R}^2$. *Existe-t-il une partie de* $\mathbb{R}^2$ *qui ne soit ni ouverte, ni fermée ?*
2. Est-ce que la famille des $B(0, r) = \{(xy) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r\}$ *(pour* $r \in [0; +\infty[$) *forme une topologie sur* $\mathbb{R}^2$ *? Si oui, est-elle séparée ?*

3. Est-ce que les topologies définies en 1. et 2. sont les mêmes ? Y'en-a-t-il une plus fine que l'autre ?
4. Y-a-t-il un ouvert usuel de $\mathbb{R}^2$ qui ne soit pas de la forme $U \times V$ où U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}$ (c'est àa dire une réunion d'intervalles ouverts) ?

Exercice 1.10.4 *Soient X, Y deux ensembles et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Soient $(U_i)_{i\in I}$ une famille de parties de X.*
1. Montrer que $f(\cup_{i\in I} U_i) = \cup_{i\in I} f(U_i)$.
2. Montrer que $f(\cap_{i\in I} U_i) \subset \cap_{i\in I} f(U_i)$. et que l'inclusion peut être stricte. A quelle condition sur f a-t-on égalité ? 3. Soit A un sous-ensemble de Y. Montrer que $f^{-1}(Y - A) = X - f^{-1}(A)$.

Soit E un espace topologique et A une partie de E. Rappelons que l'adhérence de A, notée $\bar{A}$ est le plus petit fermé de E contenant A. L'intérieur de A, noté A^0 est le plus grand ouvert de E contenu dans A.

Exercice 1.10.5 *On considère $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle. Déterminer l'intérieur et l'adhérence de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.*

Exercice 1.10.6 *On considère $\mathbb{R}^2$ muni de sa topologie usuelle. Déeterminer l'intérieur et l'adhérence des sous-ensembles suivants :*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x > y + 1\} \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < 2 \ et\ 0 \leq y \leq 1\}$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\} \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \geq 4\} \cap \mathbb{Q}^2.$$

Exercice 1.10.7 *(une autre définition de l'intérieur et de l'adhérence). Soit A une partie d'un espace topologique E. On dit qu'un point $x \in A$ est intérieur à A si il existe un ouvert U_x contenant x et inclus dans A. on dit qu'un point $x \in E$ est adhérent à A si tout ouvert U contenant x rencontre A (c'est à dire $U \cap A \neq$ pour tout ouvert U contenant x).*
1. Montrer que $\mathring{A} = \{x \in A : x \text{ est intérieur à } A\}$.
2. Montrer que $A \subset B$ implique $\mathring{A} \subset B^0$.
3. Montrer que $\overline{A^c} = (\mathring{A})^c$ et que $\overline{A}^c = (\mathring{A})^c$
4. En déduire que $\overline{A} = \{x \in E : \ x \text{ adhérent à } A\}$.

Exercice 1.10.8 *Soit X un espace topologique, A, B des sous-ensembles de X.*
1. Montrer que

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad int(A \cap B) = intA \cap intB$$

et montrer que la première inclusion peut être stricte.
2. Que peut on dire de $\mathring{A} \cup B^0$ *?*
3. On note $u(A) = (\overline{A})^0$ *et* $v(A) = \overline{A^0}$.
a) Calculer $u(A)$ *et* $v(A)$ *pour* $E = \mathbb{R}$ *(avec la topologie usuelle) et* $A =]0;2]$ *et* $A = \mathbb{Q}$.
b) Comparer $\overline{A}$, $\mathring{A}$, $u(A)$ *et* $v(A)$.
c) Montrer que $u^2 = u$ *et* $v^2 = v$.
4. Soit Y *un espace topologique et* $C \subset Y$. *On munit* $X \times Y$ *de la topologie produit.*
Montrer que $\overline{A \times C} = \overline{A} \times \overline{C}$ *et* $(A \times^0 C) = A^0 \times B^0$.

Exercice 1.10.9 *1) Soit* $\chi_A : E \longrightarrow \{0,1\}$ *la fonction caractéristique de* $A \subset E$, $\chi_A(x) = 1$ *si* $x \in A$, $\chi_A(x) = 0$ *sinon.*
a) On munit $\{0,1\}$ *de la topologie discrète. Montrer que* χ_A *est continue en* x *si et seulement si* x *n'appartient pas à la frontière de* A *;*
b) Donner une condition pour que χ_A *soit continue sur* E *et un exemple où* χ_A *n'est continue en aucun point de* E.
2)Soient X *et* Y *des espaces topologiques et une application* $f : X \longrightarrow Y$. *Montrer que* f *est continue si et seulement si pour toute partie* A *de* X, *on a* $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$.
3)Soient f *et* g *deux fonctions continues sur un espace topologique* X *et à valeurs dans un espace topologique séparé* Y. *Vérifier que l'ensemble*

$$A = \{x \in X : \ f(x) = g(x)\}$$

est un fermé de X. *4) Soient* f *et* g *deux fonctions continues sur un espace topologique* X *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$.
a) Montrer que l'ensemble $A = \{x \in X : \ 1 < f(x) < 2\}$ *est ouvert.*
b) Montrer que l'ensemble $B = \{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ *est fermé.*

Espaces métriques

Exercice 1.10.10 *On munit le sous ensemble* $X = [0,1] \cup [2;4[$ *de* $\mathbb{R}$ *de la distance usuelle* $d(x,y) = |x - y|$
a) $A = [2,4[$ *est-il ouvert dans l'espace topologique* X? *Est-il fermé ?*
b) Montrer que $B = [0,1]$ *est ouvert et fermé dans* X.
c) La suite $u_n = 4 - 3^{-n}$ *est -elle convergente dans* X?

Exercice 1.10.11 *Soit* $(E_i, d_i)_{1\leq i\leq n}$ *une famille d'espaces métriques. Montrer que*

$$D_1 = \sup_{1\leq i\leq n}\{d_i(x_i, y_i)\},\ \ D_2 = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i),\ \ D_3 = \Big(\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i, y_i)\Big)^{1/2}$$

sont des distances sur $E = \Pi_{i=1}^n E_i$.

Exercice 1.10.12 *Soit* E *l' ensemble des suites* $x = (x_n)_{n\geq 1}$ *de nombres complexes tels que la suite* $(|x_n|^{\frac{1}{n}})_{n\geq 1}$ *soit majorée. On pose* $d(x, y) = \sup_n(|x_n - y_n|^{\frac{1}{n}})$ *pour* $(x, y) \in E \times E$.
1) Montrer que d *est une distance sur* E.
2) Soit A *la partie de* E *formée par les suites* $x = (x_n)_{n\geq 1}$ *pour lesquelles le nombre de termes non nuls est fini. Montrer que* $\bar{A}$ *est la partie de* E *formée par les suites* $x = (x_n)_{n\geq 1}$ *telles que* $\lim_{n\to+\infty} |x_n|^{\frac{1}{n}} = 0$.
3) Soit $a = (a_n)_{n\geq 1} \in E$. *Pour* $t \in \mathbb{R}$, *on pose* $ta = (ta_n)_{n\geq 1}$. *Montrer que* $ta \in E$ *et que l' application* $t \to ta$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *si et seulement si* $a \in \bar{A}$.

Exercice 1.10.13 *A) Soit* (E, d) *un espace métrique.*
a) Montrer que pour deux points distincts $x, y \in E$, *il existe deux ouverts disjoints* U *et* V *tels que* $x \in U$ *et* $y \in V$. *En déduire que les parties singletons de* E *sont des fermées.*
b) Montrer que pour tout ouvert U, *et pour tout point* $x \in U$, *il existe un ouvert* V *telque* $x \in V \in \bar{V} \subset U$.
c) Montrer la propriété précédente est équivalente à la suivante : pour tout point $x \in E$ *et toute partie fermée* F *de* E *ne contenant pas* x, *il existe des ouverts disjoints,* V *et* V' *de* E *tels que* $x \in V$ *et* $F \subset V'$.
B) Soit A *une partie fermée d'un espace métrique* (E, d) *et soit* $(x_n)_{n\geq 1}$ *une suite d'éléments de* A.
a) Rappeler la définition d'un point limite x *de la suite* (x_n).
Montrer que x *est point limite si et seulement si toute* ϵ*-boule ouverte* $B(x, \epsilon)$ *contient presque tous les points de la suite* (x_n).
b) En déduire que si x *est point limite de* (x_n) *alors tout voisinage de* x *rencontre* A*(ie* x *appartient à l'adhérence de* A*).*
c) Montrer inversement que si $y \in \bar{A}$ *alors il existe une suite* $(y_n)_{n\geq 0}$ *d'éléments de* A *qui converge vers* y.
d) Déduire de ce qui précéde que A *est fermée si et seulement si toute convergente formée d'éléments de* A *converge verge vers un élément de* A.

Exercice 1.10.14 *Soit* (E, d) *un espace métrique et* A *une partie (non vide) de* E*. Etant donné* $x \in E$*, on définit "la distance de* x *à* A*" par la formule*

$$d(x, A) = inf_{y \in A}(d(x, y))$$

a) Montrer que $d(x, A) = 0$ *si et seulement si* $x \in \bar{A}$*. Montrer que* $d(x, A) = d(x, \bar{A})$
b) Montrer que l'application $x \longmapsto d(x, A)$ *de* E *dans* $\mathbb{R}$ *est uniformément continue(on pourra montrer qu'elle est lipschitzienne)*