

Chapitre 2

Propagation et propriétés des Faisceaux gaussiens

2.1 Introduction

Les ondes planes décrivent de manière simplifiée la propagation libre des ondes électromagnétiques. Ces ondes constituent les solutions les plus simples des équations de Maxwell car caractérisées par leur transversalité, par leur amplitude constante. Cependant pour décrire la propagation d'un faisceau laser, l'approche par une onde plane est mal adaptée car le profil de l'intensité d'un faisceau laser est un profil gaussien. La description des faisceaux lasers peut donc se faire en utilisant les faisceaux gaussiens. Ces faisceaux gaussiens sont aussi des solutions des équations de Maxwell. Dans la suite de ce chapitre, nous décrirons dans un premier temps la solution de l'équation de propagation d'un faisceau laser dans le cadre de l'approximation paraxiale. Le mode fondamentale d'un faisceau gaussien qui est solution de l'équation parabolique paraxiale est décrit. Les paramètres caractéristiques d'un mode fondamental d'un faisceau gaussien, le profil gaussien de l'intensité d'un faisceau sont également décrits. Dans un second temps, la propagation d'un faisceau gaussien est décrite. Les notions de matrice de transfert, de loi ABCD et son application sur un faisceau gaussien seront aussi exposées dans ce chapitre.

2.2 Equation d'onde paraxiale et onde sphérique

L'équation de propagation déduite des équations de Maxwell d'un onde se propageant dans un milieu isotrope s'écrit :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1)$$

Si l'on considère la propagation d'une onde électromagnétique monochromatique de fréquence $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$, l'équation 1.1 admet comme solution l'onde sphérique :

$$\vec{E}(r, t) = \frac{1}{2} \frac{E_0}{r} \exp[j(\omega t - kr)] \vec{n} \quad (2.2)$$

On peut réécrire l'équation 2.1 sous la forme suivante :

$$(\Delta + k^2)E(x, y, z) = 0 \quad (2.3)$$

où $k = \omega/c$ est le vecteur d'onde et $E(x, y, z) = \frac{E_0}{r} \exp(-jkr)$ l'onde sphérique divergente. r est la distance entre la source placée à l'origine du repère (x, y, z) de l'onde et le point d'observation. Dans le cadre de l'approximation paraxiale on considère que le champ se propage selon un axe privilégiée. Si nous désignons par z cet axe, alors l'observation s'effectue sur un point peu éloigné de cet axe. Nous pouvons dans ce cas, faire un développement limité sur r :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \approx z + \frac{x^2 + y^2}{2z} \quad (2.4)$$

Le champ électrique au point considéré s'écrit alors :

$$E_{paraxial}(x, y, z) = \frac{E_0}{z} e^{-jkz} e\left(-jk \frac{x^2 + y^2}{2z}\right) \quad (2.5)$$

L'onde sphérique paraxiale n'est une solution approchée de l'équation de propagation où le terme en e^{-jkz} est le facteur de propagation et le terme $\frac{1}{z} e\left(-jk \frac{x^2 + y^2}{2z}\right)$ est le facteur de variation transverse de l'amplitude. Du point de vue physique, l'onde sphérique paraxiale n'est qu'une solution approchée convenable pour décrire la propagation des ondes électromagnétiques dans un espace libre. Dans le cas des lasers qui nous intéresse ici, cette onde est peu avantageuse pour décrire le faisceau laser car l'énergie se répandant dans tout l'espace. Ce qui entraîne des pertes importantes qui sont pas compatibles avec l'émission laser. Pour décrire cette onde de manière plus adaptée à la structure d'un champ électromagnétique dans une cavité laser considérons les solutions de l'équation de propagation comme des faisceaux se propageant globalement selon Oz , avec des rayons paraxiaux. Nous pouvons réécrire l'équation 2.5 de la forme suivante :

$$E(x, y, z) = \Psi(x, y, z) e^{-jkz} \quad (2.6)$$

Faisons l'hypothèse que l'approximation paraxiale suppose que $\Psi(x, y, z)$ varie beaucoup plus faiblement en fonction z sur une distance de l'ordre de la longueur d'onde $\left(\lambda \left| \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right| \ll |\Psi|, \lambda \left| \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right| \ll \left| \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right| \right)$, que celles des oscillations du type e^{-jkz} . Dans ces conditions, en injectant le champ paraxial dans l'équation de propagation, l'équation d'onde paraxiale peut être réécrite de la façon suivante :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - 2jk \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0 \quad (2.7)$$

L'équation 2.8 est à la base de la théorie des faisceaux gaussiens. Elle est appelée équation parabolique paraxiale. C'est une équation aux dérivées partielles linéaire linéaire du premier ordre en z . On peut écrire simplement cette équation de la forme :

$$\frac{1}{2k} \Delta_{\perp} \Psi = j \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (2.8)$$

où $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}$, est le Laplacien transverse.

2.2.1 Mode fondamental d'un faisceau gaussien

L'équation d'onde 2.8 admet comme solution des ondes dont le profil d'intensité est de forme gaussienne ou encore modes gaussiens. La solution la plus simple est celle qui présente une symétrie cylindrique. Ce type de solution est connue sous le nom de mode fondamental. Cette fonction vérifie l'équation d'onde paraxiale et s'écrit de la forme suivante :

$$\Psi(x, y, z) = e^{-j[\Delta\Theta(z) + \frac{k}{2q(z)}(x^2 + y^2)]} \quad (2.9)$$

où $\Delta\Theta(z)$ est un déphasage qui varie en fonction de z et $Q(z)$ représente un rayon de courbure complexe. En pratique dans les résonateurs lasers cette solution, appelée mode fondamental gaussien est la plus importante.

Injectons cette solution particulière dans l'équation d'onde paraxiale, on obtient :

$$\left[\frac{k^2}{q^2} (x^2 + y^2) \left(\frac{dq}{dz} - 1 \right) - 2k \left(\frac{d\Delta\Theta}{dz} + \frac{j}{q} \right) \right] = 0 \quad (2.10)$$

D'après l'équation 2.10, $\Delta\Theta(z)$ et $q(z)$ vérifient :

$$\frac{dq}{dz} = 1 \quad (2.11)$$

$$\frac{d\Theta}{dz} = \frac{-j}{q} \quad (2.12)$$

On en déduit par intégration que :

$$q(z) = q_0 + z \quad (2.13)$$

$$\Theta(z) = -j \ln \left(\frac{q_0 + z}{q_0} \right) \quad (2.14)$$

Si l'on pose que :

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - j \frac{\lambda}{\pi w^2(z)} \quad (2.15)$$

Le terme $e^{-j\Delta\Theta}$ s'écrit alors :

$$e^{-j\Delta\Theta} = \frac{1}{1 + \frac{z}{q_0}} = \frac{1}{\frac{z}{R_0} - j \frac{\lambda z}{\pi w_0^2}} \quad (2.16)$$

En choisissant à l'origine un rayon de courbure à l'infini on a $q_0 = j \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$. On montre facilement que :

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{q_0 + z} = \frac{1/q_0}{1 + z/q_0} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2} \left[\frac{1}{z} \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2 - j \frac{\lambda}{\pi w_0^2} \right] \quad (2.17)$$

En comparant les équations 2.15 et 2.17 et par identification on a :

$$R(z) = z + \frac{Z_R^2}{z} \quad (2.18)$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{Z_R}\right)^2} \quad (2.19)$$

Où $Z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$.

- Le paramètre w_0 ($z=0$) est appelé waist du faisceau. On l'appelle également dans la littérature rayon de ceinture du faisceau ou rayon de pincement. C'est la valeur minimale du rayon $w(z)$ où le rayon de courbure R est infini.
- La paramètre Z_R , lui est appelé la longueur de Rayleigh. Elle mesure la divergence du faisceau : plus il est petit plus le faisceau du laser est divergent.

Exercice d'application : Connaissant R et w montrer qu'on peut déterminer le waist

w_0 et la position z du faisceau gaussien par les relations suivantes :

$$w_0^2 = \frac{w^2}{1 + \left(\frac{\pi w^2}{\lambda R}\right)^2} \quad (2.20)$$

$$z = \frac{R}{1 + \left(\frac{\lambda R}{\pi w^2}\right)^2} \quad (2.21)$$

La divergence du faisceau laser est mesurée par la limite pour z tendant vers l'infini de w/z . Ainsi on a :

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{w}{z} = \frac{w_0}{Z_R} = \frac{\lambda}{\pi w_0} = \tan\theta \quad (2.22)$$

Pour une faible divergence on $\tan\theta \approx \theta = \frac{\lambda}{\pi w_0}$. La figure 2.1, montre l'évolution de la longueur de Rayleigh et de la divergence en fonction du waist pour une longueur d'onde $\lambda = 1 \mu\text{m}$.

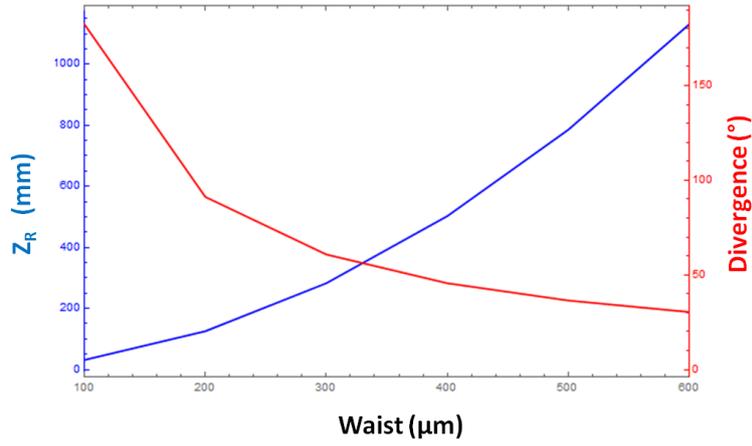


FIGURE 2.1 – Evolution de la longueur de Rayleigh et de la divergence en fonction du waist pour une longueur d'onde $\lambda = 1 \mu\text{m}$.

2.2.2 Phase de Gouy

Écrivons le terme $e^{-j\Delta\theta}$ en fonction de Z_R :

$$e^{-j\Delta\theta} = \frac{1}{1 - j\frac{z}{Z_R}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{Z_R}\right)^2}} e^{-j\varphi(z)} \quad (2.23)$$

La phase φ représente la phase de Gouy qui est caractéristique de l'onde gaussienne. Elle est donnée par :

$$\tan \varphi(z) = \frac{z}{Z_R} \quad (2.24)$$

Soit :

$$\varphi(z) = -\arctan\left(\frac{z}{Z_R}\right) \quad (2.25)$$

2.2.3 Intensité du faisceau

Par définition, l'intensité du faisceau est par :

$$I = |E|^2 \quad (2.26)$$

D'après les équations 2.6, 2.9, 2.15, l'expression du champ du E peut s'écrire par :

$$E = e^{-j\Delta\theta} e^{-j\left(\frac{k}{2q(z)}(x^2+y^2)+kz\right)} \quad (2.27)$$

En remplaçant dans 2.27, les expressions de $e^{-j\Delta\Theta}$ et $1/q(z)$ établies précédemment et en posant $r^2 = x^2 + y^2$ on a :

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{Z_R}\right)^2}} e^{-j\left(\varphi(z) + \frac{kr^2}{2R(z)} - j\frac{k\lambda r^2}{2\pi w^2(z)} + kz\right)} \quad (2.28)$$

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{Z_R}\right)^2}} e^{-\frac{r^2}{w^2(z)}} e^{-j\left(\varphi(z) + \frac{kr^2}{2R(z)} + kz\right)} \quad (2.29)$$

Si l'on pose $\phi(z) = \varphi(z) + \frac{kr^2}{2R(z)} + kz$, la phase totale, l'expression du champ électrique est :

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{Z_R}\right)^2}} e^{-\frac{r^2}{w^2(z)}} e^{-j\phi(z)} \quad (2.30)$$

L'expression de l'intensité qu'on cherche s'écrit donc simplement par :

$$I(r, z) = I_0(z) e^{-\frac{2r^2}{w^2(z)}} \quad (2.31)$$

avec $I_0(z) = \frac{1}{1 + \left(\frac{z}{Z_R}\right)^2}$

Le profil en intensité du laser est donc un profil gaussien (voir figure 2.2). $w(z)$ est la tâche laser dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation du laser z . C'est le rayon à $1/e^2$ ($I = I_0/e^2$, pour $r = w$) du profil gaussien de l'intensité du laser d'amplitude transverse dans le plan d'abscisse z ($1/e$ si on considère le champ électrique).

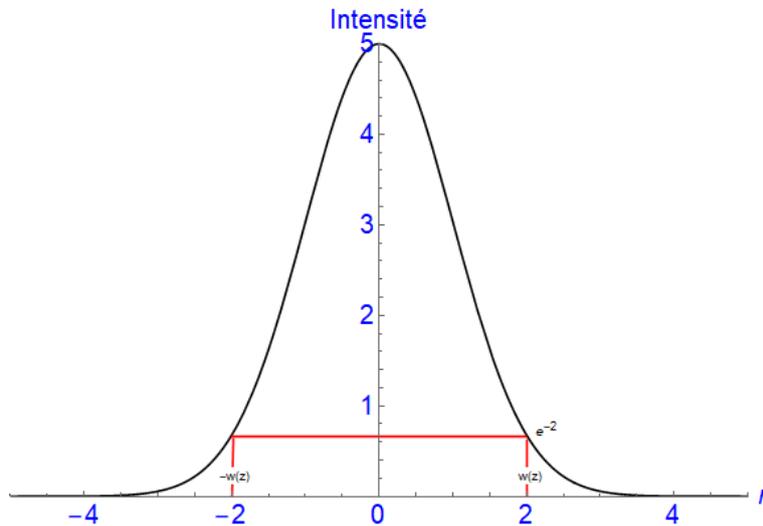


FIGURE 2.2 – Profil gaussien de l'intensité d'un laser.

2.3 Propagation d'un faisceau gaussien

2.3.1 Matrices de transfert ou matrice ABCD

Les matrices de transfert appelées aussi matrices ABCD constituent une méthode très pratique pour décrire la propagation d'un rayon lumineux dans un milieu formé par des éléments optiques (lentille, miroir, dioptries...). Cette méthode consiste à associer chaque élément optique une matrice 2x2 spécifique.

Considérons un rayon lumineux se propageant dans un système optique d'axe z . Le rayon lumineux est caractérisé par son ordonnée r (sa position) et par la pente de la droite θ (voir figure 2.3).

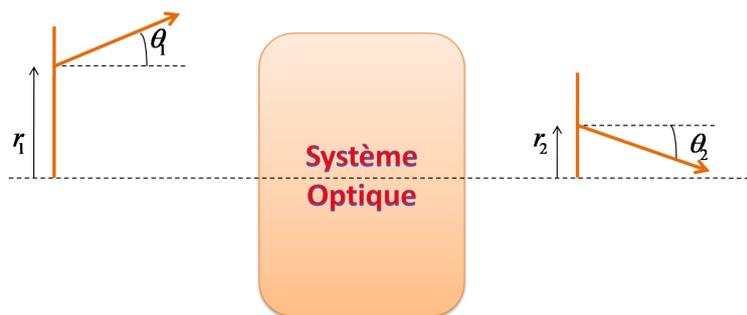


FIGURE 2.3 – Propagation d'un rayon lumineux dans un système optique.

Examinons le cas où le rayon se propage dans un espace libre de distance d (voir figure 2.4) dans un premier temps et dans un second temps, le cas où le système se propage à travers une lentille mince de distance focale f (voir figure laser 2.5).

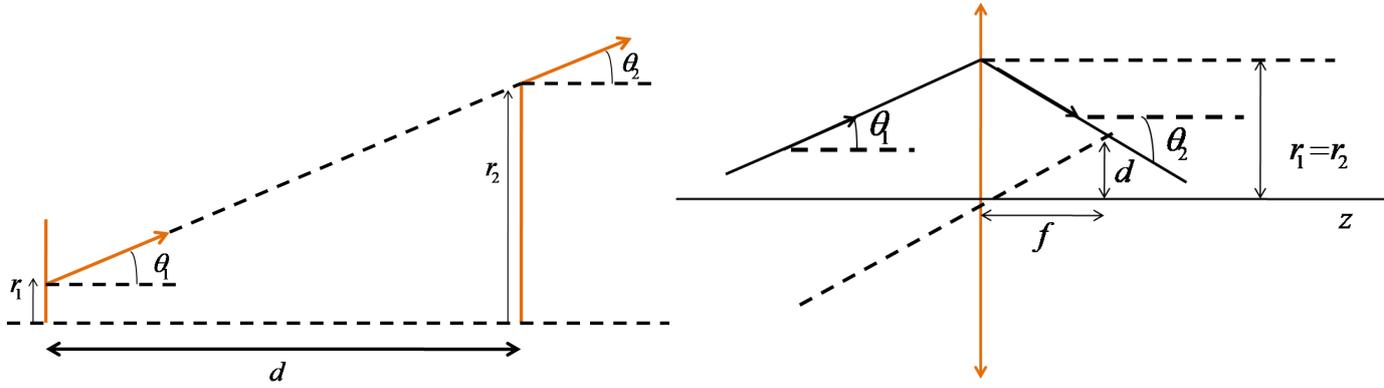


FIGURE 2.4 – Propagation dans un espace libre. FIGURE 2.5 – Propagation à travers une lentille mince.

D'après la figure 2.4, on a :

$$r_2 = r_1 + d \tan \theta_1 \approx r_1 + \theta_1 d \quad (2.32)$$

$$\theta_2 = \theta_1 \quad (2.33)$$

Dans les conditions de Gauss, les relations entre (r_2, θ_2) à la sortie du système optique et (r_1, θ_1) à l'entrée du système optique sont linéaires et peuvent être écrites sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

Essayons de faire la même chose pour la figure 2.5. On a les relations suivantes :

$$r_2 = r_1 \quad (2.35)$$

$$d = f \theta_1 \quad (2.36)$$

$$\theta_2 = -\theta_1 \quad (2.37)$$

Comme on l'a fait pour la propagation dans un espace libre, écrivons sous forme matricielle les relations entre (r_2, θ_2) et (r_1, θ_1) .

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

On remarque que, aussi bien pour la propagation dans un espace libre et à travers une lentille mince, les relations matricielles s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Où $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, est la matrice de transfert ou matrice A, B, C, D qui caractérise complètement la traversée du système optique. Les lettres A, B, C, D représentent les éléments de la matrice. Pour la propagation dans l'espace libre $A = 1, B = d, C = 0, D = 1$ et pour la lentille mince $A = 1, B = 0, C = -1/f, D = 1$.

D'une manière générale, la matrice d'un système optique composé de $N (i = 1, 2, \dots, N)$ sous-systèmes optiques élémentaires ayant chacun une matrice M_i est par $M_{\text{système}} = M_N \dots M_i \dots M_3 M_2 M_1$. Par exemple un rayon lumineux qui traverse un espace libre de distance puis une lentille mince, sa matrice de transfert s'écrit :

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

Exercice d'application

Déterminer les matrices A, B, C, D lorsqu'un rayon lumineux traverse les systèmes optiques suivants :

1. Propagation sur une distance d dans un milieu d'indice n .
2. Propagation sur dioptré plan entre deux milieux d'indices n_1 et n_2 .
3. Miroir sphérique de rayon de courbure R .

2.3.2 Loi ABCD

La loi ABCD permet de décrire la propagation d'une onde sphérique dans un système optique. Soit une onde sphérique se propageant à travers d'un système optique comme le montre la figure 2.6. Le rayon de courbure à l'entrée d'un système optique est R_1 et R_2 à la sortie.

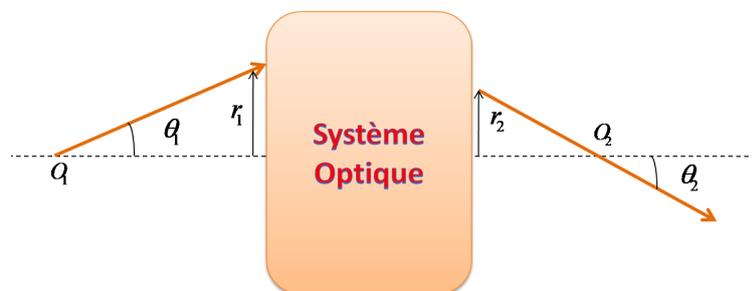


FIGURE 2.6 – Propagation d'un rayon lumineux dans un système optique.

On a les relations suivantes :

$$R_1 \approx \frac{r_1}{\theta_1} \quad (2.41)$$

$$R_2 \approx \frac{r_2}{\theta_2} \quad (2.42)$$

Par ailleurs, la matrice ABCD de ce système optique s'écrit d'après ce qu'on a vu plus haut par :

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Ainsi les équations 2.41, 2.42 et 2.42 permettent d'écrire la relation suivante :

$$R_2 = \frac{AR_1 + B}{CR_1 + D} \quad (2.44)$$

La relation établie en 2.44, est appelée loi ABCD. C'est une loi très importante notamment pour déterminer les rayons de courbure complexes dans le cadre des faisceaux gaussiens.

2.3.3 Application de la loi ABCD aux faisceaux gaussiens

Le faisceau d'une cavité laser stable garde le même aspect transverse et la même phase après un aller-retour dans la cavité. En d'autres termes, le rayon de courbure complexe doit être conservé quelque soit le point M considéré. La loi ABCD définit plus haut s'applique aux faisceaux gaussiens et le rayon complexe s'écrit par :

$$q(M) = \frac{Aq(M) + B}{Cq(M) + D} \quad (2.45)$$

Cette loi est générale et s'applique à toute cavité résonnante. On peut déterminer la position notamment des waists en utilisant l'équation 2.45. Développons cette équation et identifions les parties réelles et imaginaires. On a :

$$Cq^2 - (A - D)q - B = 0 \quad (2.46)$$

On peut réécrire l'équation 2.46 de la forme suivante :

$$B \left(\frac{1}{q} \right)^2 + (A - D) \frac{1}{q} - C = 0 \quad (2.47)$$

L'équation ci-dessus est une équation du second degré du coup on a :

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2B} \left(D - A \pm \sqrt{(A - D)^2 + 4BC} \right) \quad (2.48)$$

Par ailleurs, en comparant les équations 2.48 et 2.15, on peut poser :

$$\frac{1}{2B} \left(D - A \pm \sqrt{(A - D)^2 + 4BC} \right) = \frac{1}{R} - j \frac{\lambda}{\pi w^2} \quad (2.49)$$

Ici le faisceau existe si et seulement w fini. Du coup, il faut que $(A - D)^2 + 4BC$ soit strictement négatif pour que la solution de l'équation soit complexe. Sachant que la

matrice de transfert M est une matrice unitaire $AD - AB = 1$, on a la condition suivante : $(A + D)^2 < 4$ ce qui revient à écrire $-1 < \frac{A+D}{2} < 1$. Soit :

$$0 < \frac{A + D + 2}{4} < 1 \quad (2.50)$$

L'équation 2.50 est la condition de stabilité d'une cavité laser. L'inégalité étant stricte on exclue $|A + D| = 2$ qui constituent les cas limites où les cavités sont instables pour les faisceaux gaussiens. Nous pouvons donc déterminer les caractéristiques du faisceau gaussien au M , données par :

$$R = \frac{2B}{D - A} \quad (2.51)$$

$$w^2 = \frac{\lambda}{\pi} |B| \left[1 - \left(\frac{A + D}{2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.52)$$

On constate que si le rayon de courbure est infini alors le point M est à un waist du faisceau c'est à dire $A = D$.

2.3.4 Focalisation d'un faisceau par une lentille

Considérons la propagation d'un faisceau gaussien à travers une lentille mince puis sur un espace libre de distance d comme illustrée par la figure 2.7.

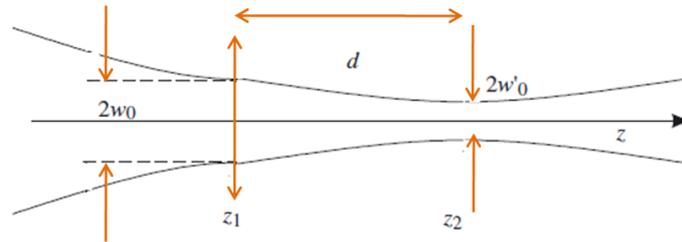


FIGURE 2.7 – Focalisation d'un faisceau gaussien par une lentille.

Les caractéristiques du faisceau gaussien avant passage à travers la lentille sont w_0 et z_R qui sont respectivement son waist et sa longueur de Rayleigh. On peut déterminer les caractéristiques (w'_0, z'_R) du faisceau émergent après passage dans la lentille et sa distance d par rapport à la lentille.

Ici le rayon de courbure complexe du faisceau incident est donné par :

$$q(z_1) = j \frac{\pi w_0^2}{\lambda} = j z_R \quad (2.53)$$

Le rayon de courbure du faisceau émergent lui est donné par :

$$q(z_2) = j \frac{\pi(\omega'_0)^2}{\lambda} = j z'_R \quad (2.54)$$

Par ailleurs, loi ABCD nous permet d'écrire :

$$q(z_2) = \frac{Aq(z_1) + B}{Cq(z_1) + D} \quad (2.55)$$

La matrice de transfert de la propagation du faisceau à travers la lentille puis sur une distance d s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f} & d \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

d'où :

$$q(z_2) = \frac{\left(1 - \frac{d}{f}\right)q(z_1) + d}{-\frac{1}{f}q(z_1) + 1} \quad (2.57)$$

Si l'on développe l'équation 2.57 on a :

$$q(z_2) = \frac{\left[d - \frac{z'_R}{f} \left(1 - \frac{d}{f}\right)\right] + j \left[z'_R \left(1 - \frac{d}{f}\right) + \frac{dz'_R}{f}\right]}{1 + \left(\frac{z'_R}{f}\right)^2} \quad (2.58)$$

En comparant les équations 2.54 et 2.58, la partie réelle de $q(z_2)$ est nulle et sa partie imaginaire est égale à z'_R . Ainsi on trouve les caractéristiques (w'_0, z'_R) du faisceau émergent et la distance d . Leurs expressions sont données par :

$$d = \frac{f}{1 + \left(\frac{f}{z'_R}\right)^2} \quad (2.59)$$

$$z'_R = \frac{z'_R}{1 + \left(\frac{z'_R}{f}\right)^2} \quad (2.60)$$

$$w'_0 = \frac{w_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{z'_R}{f}\right)^2}} \quad (2.61)$$

Les résultats obtenus montrent que le faisceau gaussien est focalisé à une distance $d < f$ de la lentille où le waist correspond à w'_0 . Donc le faisceau est toujours focalisé en avant du plan focal image de la longueur. De même la taille du faisceau image w'_0 est plus petit w_0 du faisceau incident.

Cette situation (focalisation en avant du plan focal) ne correspond pas aux propriétés de propagation des faisceaux lumineux en optique géométrique. Cependant pour un faisceau gaussien très peu divergent c'est à dire dans la limite $z'_R \rightarrow \infty$, le faisceau incident est focalisé dans le plan focal de la lentille. Dans ce cas on a :

$$d \approx f \quad (2.62)$$

$$w'_0 \approx \frac{w_0 f}{z'_R} = \frac{\lambda f}{\pi w_0} \quad (2.63)$$

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre le mode fondamental d'un faisceau gaussien qui est solution de l'équation paraxiale, a été décrit. Les caractéristiques du faisceau gaussien (waist, longueur de Rayleigh, rayon de courbure complexe...) ainsi que le profil gaussien de son intensité ont été établis. La matrice ABCD d'un faisceau se propageant à travers un système optique (espace libre, lentille, miroir sphérique...) a été aussi établie. Enfin, l'application de la loi ABCD sur un faisceau gaussien ainsi sa focalisation sur une lentille ont été exposées dans ce chapitre.

Bibliographie

- [1]. D. Hennequin, V.Zehnlé , D.Dangoisse, *Les lasers* – Collection Dunod, 3eme Edition (2013)
- [2]. O. Svelto, *Principle of lasers*–Springer, FIFTH EDITION (2010)
- [3]. K.F Renk, *Basics of Laser Physics*–Springer, Second Edition, (2012)

Annexe

Annexe A

Démonstration des quelques équations

A.1 Equation parabolique paraxiale

Le champ électrique s'écrit :

$$E(x, y, z) = \Psi(x, y, z)e^{-jkz} \quad (\text{A.1})$$

Déterminons l'équation de propagation du champ électrique donnée par :

$$(\Delta + k^2)E(x, y, z) = 0 \quad (\text{A.2})$$

Injectons l'équation [A.1](#) et [A.2](#) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial^2 x} (\Psi e^{-jkz}) + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} (\Psi e^{-jkz}) + \frac{\partial^2}{\partial^2 z} (\Psi e^{-jkz}) + k^2 \Psi e^{-jkz} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 x} e^{-jkz} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 y} e^{-jkz} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} e^{-jkz} - jk \Psi e^{-jkz} \right) + k^2 \Psi e^{-jkz} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 x} e^{-jkz} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 y} e^{-jkz} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 z} e^{-jkz} - jk \frac{\partial \Psi}{\partial z} e^{-jkz} - jk \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} e^{-jkz} - jk \Psi e^{-jkz} \right) + k^2 \Psi e^{-jkz} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 x} e^{-jkz} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 y} e^{-jkz} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 z} e^{-jkz} - 2jk \frac{\partial \Psi}{\partial z} e^{-jkz} &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 z} - 2jk \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) e^{-jkz} &= 0 \end{aligned}$$

L'hypothèse que l'approximation paraxiale suppose que $\Psi(x, y, z)$ varie beaucoup plus faiblement en fonction z sur une distance de l'ordre de la longueur d'onde

$\left(\lambda \left| \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right| \ll |\Psi|, \lambda \left| \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right| \ll \left| \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right| \right)$, que celles des oscillations du type e^{-jkz} . Ainsi en appliquant cette hypothèse, on trouve l'équation parabolique paraxiale, soit :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - 2jk \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.3})$$

A.2 Démonstration de la solution particulière de l'onde paraxiale ou mode fondamental

L'équation d'onde A.3 admet comme solution des ondes dont le profil d'intensité est de forme gaussienne ou encore modes gaussiens. La solution la plus simple est celle qui présente une symétrie cylindrique. Ce type de solution est connue sous le nom de mode fondamental. Cette fonction vérifie l'équation d'onde paraxiale et s'écrit de la forme suivante :

$$\Psi(x, y, z) = e^{-j \left[\Delta \Theta(z) + \frac{k}{2q(z)} (x^2 + y^2) \right]} \quad (\text{A.4})$$

Injectons l'équation A.4 dans A.3. Calculons d'abord respectivement $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}$ et $-2jk \frac{\partial \Psi}{\partial z}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(e^{-j \left[\Delta \Theta(z) + \frac{k}{2q(z)} (x^2 + y^2) \right]} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[e^{-j \Delta \Theta(z)} \left(-j \frac{2k}{2q(z)} x e^{-j \frac{k}{2q(z)} (x^2 + y^2)} \right) \right] \\ &= -j \frac{k}{q(z)} e^{-j \Delta \Theta(z)} \left[e^{-j \frac{k}{2q(z)} (x^2 + y^2)} - j \frac{k}{q(z)} x^2 e^{-j \frac{k}{2q(z)} (x^2 + y^2)} \right] \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = e^{-j \left[\Delta \Theta(z) + \frac{k}{2q(z)} (x^2 + y^2) \right]} \left(-j \frac{k}{q(z)} - \frac{k^2}{q^2(z)} x^2 \right) \quad (\text{A.5})$$

De la même manière :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = e^{-j \left[\Delta \Theta(z) + \frac{k}{2q(z)} (x^2 + y^2) \right]} \left(-j \frac{k}{q(z)} - \frac{k^2}{q^2(z)} y^2 \right) \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} -2jk \frac{\partial \Psi}{\partial z} &= -2jk \frac{\partial}{\partial z} \left(e^{-j \left[\Delta \Theta(z) + \frac{k}{2q(z)} (x^2 + y^2) \right]} \right) \\ &= -2jk \left[-j \frac{\partial \Delta \Theta(z)}{\partial z} e^{-j \Delta \Theta(z)} e^{-j \frac{k}{2q(z)} (x^2 + y^2)} + e^{-j \Delta \Theta(z)} \left(j \frac{k}{q^2(z)} (x^2 + y^2) \frac{\partial q}{\partial z} e^{-j \frac{k}{2q(z)} (x^2 + y^2)} \right) \right] \end{aligned}$$

Ainsi :

$$-2jk \frac{\partial \Psi}{\partial z} = e^{-j[\Delta\Theta(z) + \frac{k}{2q(z)}(x^2 + y^2)]} \left[-2k \frac{\partial \Delta\Theta(z)}{\partial z} + \frac{k^2}{q^2(z)}(x^2 + y^2) \frac{\partial q}{\partial z} \right] \quad (\text{A.7})$$

En faisant la somme des équations A.5, A.6, A.7 et en l'égalisant à 0, on trouve la relation cherchée :

$$\left[\frac{k^2}{q^2}(x^2 + y^2) \left(\frac{dq}{dz} - 1 \right) - 2k \left(\frac{d\Delta\Theta}{dz} + \frac{j}{q} \right) \right] = 0 \quad (\text{A.8})$$