Travaux diriges

- Energie de liaison
- Modèles nucléaires
- Réactions nucléaires

Exercice 1 :

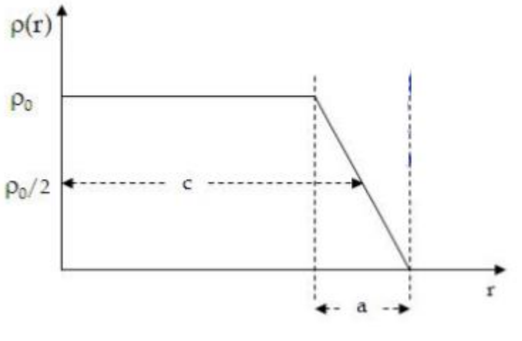
Le cuivre naturel se compose de deux isotopes ^{63}**Cu** et ^{65}**Cu** avec les abondances isotopiques respectives a_{63} = 69% et a_{65} = 31%. La masse d'un atome du cuivre naturel est 63,546.u

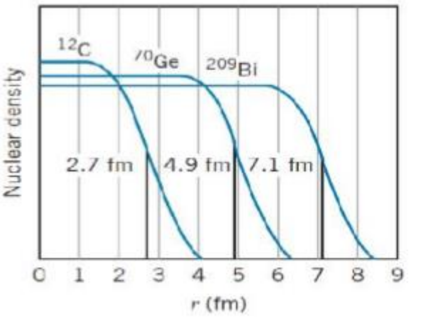
Calculer les nombres de noyaux ^{63}**Cu** et ^{65}**Cu** contenus dans un échantillon de cuivre de masse m = 10 g.

Exercice 2 :

1) Soient les noyaux suivants : ^{12}C ; ^{70}Ge et ^{209}Bi. Sachant que le rayon nucléaire r_0 = 1,1 fm, calculer le rayon pour chaque noyau.
2) En supposant que la densité de nucléons varie dans le noyau en fonction de la distance au centre comme l'indique la figure ci-dessous, quelle est la fraction des nucléons situés dans la zone superficielle dans les noyaux donnés. **On donne :** ρ_0 = 0,17 fm^{-3} ; c = 1,1.A$^{1/3}$ fm et a = 3,0 fm

   NB : La fraction des nucléons en surface est $f = \dfrac{aire\ surface}{aire\ totale} \times 100$.





Exercice 3 : Les questions 1), 2) et 3) sont indépendantes

1) Distance d'approche dans l'expérience de Rutherford : Calculer quelle distance minimale D du centre du nuclide d'or (Z = 79) atteint une particule α d'énergie cinétique 78,6MeV dans une collision frontale.
2) En admettant que toute la masse atomique est concentrée dans le noyau et que celui-ci peut être représenté par une sphère de rayon **R** = **r**$_0$.**A**$^{1/3}$, (A étant le nombre de masse et **r**$_0$ = 1,2 fm), calculer la masse volumique de la matière nucléaire.
3) On considère que la distance approximative entre les deux protons de l'isotope $_2^3He$ est de 1,7 fm.
   a) Estimer l'énergie de répulsion coulombienne dans le noyau $_2^3He$.
   b) Calculer la différence entre les énergies de liaison totales de $_1^3H$ et $_2^3He$.
   c) Comparer avec la valeur obtenue pour l'énergie de répulsion et discuter.

Exercice 4 :

1) Si le noyau est considéré comme sphérique de rayon R, de charge Z.*e* et ayant une densité de charge ρ(*r*) uniforme.
   a) Montrer que l'énergie coulombienne des protons est donnée par : $E_C = \dfrac{3}{5}\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Z^2}{R}$.
   b) En fait la sphère n'est pas uniformément chargée puisqu'elle est composée de protons et l'on cherche à évaluer l'énergie d'interaction entre ces protons et pas l'énergie coulombienne de chaque proton. Pour évaluer la correction à apporter par rapport à la question précédente, nous allons

supposer que chaque proton a une self–energy coulombienne que l'on évaluera en supposant sa charge diluée dans toute la sphère (*puisqu'il est délocalisé dans ce volume*).

Calculer cette self–energy et donner une expression plus correcte de l'énergie coulombienne d'une sphère contenant Z protons.

2) Calculer la différence d'énergie de liaison des noyaux miroirs ${}^{33}_{16}S$ et ${}^{33}_{17}Cl$ sachant que la masse de ${}^{33}_{17}Cl$ excède celle de ${}^{33}_{16}S$ de 0,00599.u
3) Comparer la valeur obtenue à la différence d'énergie coulombienne dans ces noyaux sachant que $R = 1,4.A^{1/3}.10^{-13}\ cm$. Conclure.
4) De ce qui précède, déterminer pour A = 33 la valeur du rayon nucléaire $\mathbf{r_0}$.

Exercice 5 :

1) Pour le noyau ${}^{A}_{Z}X$, donner l'expression de l'énergie de liaison *B*(*A*, *Z*) en fonction des excès de masse de l'hydrogène, du neutron et de l'atome donné.
2) A l'aide de l'expression trouvée et des excès de masse (voir table),
   a) Calculer l'énergie de liaison d'un noyau possédant un nombre égal de protons et de neutrons et un rayon égal au 2/3 de celui du noyau ${}^{27}Al$.
   b) Calculer l'énergie de liaison par nucléon dans les noyaux ${}^{6}Li$; ^{40}Ar ; ${}^{107}Ag$ et ${}^{208}Pb$.
   c) Calculer l'énergie de séparation d'un neutron, d'une particule α de ${}^{21}_{10}Ne$.
   d) Quelle est l'énergie nécessaire pour casser un noyau de ${}^{16}_{8}O$ en une particule α et un noyau de ${}^{12}_{6}C$

Exercice 6 :

Dans le modèle de la goutte liquide, l'énergie de liaison d'un noyau (A, Z), comptée positivement, est donnée par la relation : $B(A,Z) = a_1.A - a_2.A^{2/3} - a_3.Z^2.A^{-1/3} - a_4.(A-2Z)^2.A^{-1} + \frac{a_5}{2}\left[1+(-1)^A\right](-1)^Z.A^{-3/4}$.

Cette relation comprend cinq termes, les coefficients a_i sont positifs.

1) Expliquer succinctement l'origine de chacun des termes.
2) Calculer le coefficient a_3 en MeV. Pour cela, on calculera le travail élémentaire dW associé à la force électrostatique pour placer un élément de charge dQ sur une couche dr d'une sphère (de rayon r) qui a une charge Q(r). A partir de ce calcul, on déduira le travail W total nécessaire pour rassembler les éléments de charge dans un noyau de rayon R et de numéro atomique Z. On considèrera que le noyau est sphérique avec une densité de charge uniforme ρ.
3) En considérant les neutrons et protons comme seuls constituants du noyau, montrer que pour des isobares de A impair, la masse du noyau est une fonction parabolique de Z. Que se passe-t-il lorsque A est pair ?
4) En considérant un ensemble d'isobares, donner la relation entre Z et A pour les noyaux les plus stables (pour ce calcul on négligera le terme de parité). Commenter.

   <u>On donne :</u> $R(A, Z) = r_0.A^{1/3}$ fm avec $r_0 \approx 1,2$ fm ; $\varepsilon_0 = 8,854.10^{-12}$ F.m^{-1} ; $a_4 = 23,2$ MeV.

Exercice 7 :

On rappelle la formule semi-empirique donnant l'énergie de liaison B(A, Z) d'un noyau de nombre de masse A contenant Z protons : $B(A,Z) = a_v.A - a_s.A^{2/3} - a_c.Z^2.A^{-1/3} - a_a.A^{-1}.(A-2Z)^2 + a_p.\delta(A)$

Où a_v, a_s, a_c et a_a sont des coefficients constants (en première approximation) et ayant pour valeur respectivement 14 MeV ; 13 MeV ; 0,60 MeV et 19 MeV ; $a_p = 34.A^{-3/4}$; δ(A) = 0 si A est impair ; δ(A) = +1 pour A et Z pairs ; δ(A) = −1 pour A pair et Z impair.

1) Calculer l'énergie de liaison $B(A, Z)$, l'énergie moyenne de liaison et la masse atomique des noyaux ${}^{45}_{21}Sc$ et ${}^{70}_{30}Zn$ en utilisant la formule semi empirique.
2) En supposant que l'énergie de liaison des électrons est négligeable, montrer que la masse de l'atome M(A, Z) est donnée par la relation suivante : $\mathrm{M}(\mathrm{A}, Z) = \alpha.\mathrm{A} + \beta.Z + \gamma.Z^2 - a_p.\delta(\mathrm{A})$
   a) Expliciter les coefficients α, β et γ. Comment varient ces coefficients en fonction de Z lorsque A est constant.
   b) Pour A constant, discuter l'allure de M(A, Z) = *f*(Z) en fonction de la parité de A, et tracer les courbes relatives à A = 59 et A = 64.
   c) Pour une chaine isobarique déterminer l'expression de la charge $Z_0(A)$ de l'isobare (le plus stable) ayant la plus petite masse.
   d) Quel est l'isobare le plus stable pour A = 208.

<u>Exercice 8 :</u> modèle en couches des noyaux (Travail personnel de l'étudiant)

Il n'existe pas pour les nucléons d'un noyau l'analogue du centre attractif qui agit sur les électrons d'un atome. Dans le modèle en couches des noyaux, ou modèle à particule indépendante, on admet que les nucléons du noyau se déplacent indépendamment les uns des autres dans un potentiel commun qui est supposé être le même pour les neutrons et les protons (*indépendance de charge des forces nucléaires*) sauf pour la partie coulombienne qui n'agit que sur les protons. La forme exacte de ce potentiel n'est pas connue, mais nous le soupçonnons d'être à peu près à symétrie sphérique, fonction régulière de *r* et de décroitre rapidement près de la surface du noyau. Ainsi nous pourrions utiliser les potentiels suivants :

- Puits carré sphérique de profondeur finie : $\begin{cases} V(r) = -V_0 & pour\ r \prec r_0 \\ V(r) = 0 & pour\ r \succ r_0 \end{cases}$,

  V_0 étant positif et r_0 désignant le rayon du noyau,
- Puits parabolique : $\begin{cases} V(r) = -V_0\left[1 - \left(\dfrac{r}{r_0}\right)^2\right] & pour\ r \prec r_0 \\ V(r) = 0 & pour\ r \succ r_0 \end{cases}$,
- Puits à margelle exponentielle : $\begin{cases} V(r) = -V_0 & pour\ r \prec r_0 \\ V(r) = -V_0 \exp\left(-\dfrac{r - r_0}{a}\right) & pour\ r \succ r_0 \end{cases}$, *a* étant une constante positive ayant la dimension d'une longueur.

Cependant ces potentiels (*qui correspondent grossièrement à la réalité*) conduisent à des calculs complexes et dans ce problème, nous proposons l'étude d'un potentiel qui représente certainement moins bien la réalité mais qui permet néanmoins de jeter quelques lueurs sur le modèle en couches, tour en conduisant à des calculs plus simples. Ce potentiel est le potentiel de l'oscillateur harmonique isotrope, $V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ pour tout *r*, avec *m* la masse d'un nucléon et ω la pulsation classique du mouvement.

1) En utilisant les coordonnées sphériques (r, θ, φ) pour définir la position du nucléon, montrer que l'équation de Schrödinger relative aux états stationnaires d'énergie admet des solutions de la forme :

   $\Psi(\vec{r}) = R(r)Y^l_m(\theta, \varphi) = \dfrac{u(r)}{r}Y^l_m(\theta, \varphi)$, Y^l_m désignant les harmoniques sphériques.

   A quelle équation radiale modifiée satisfait u(r) ? Effectuer le changement de variable $x = \sqrt{\dfrac{m\omega}{\hbar}}r$ dans cette équation, et poser $\varepsilon = \frac{E}{\hbar\omega}$, E désignant les valeurs propres de l'énergie. Quelles conditions physiques faut-il imposer à la fonction u(*x*) ?

2) On recherche pour l'équation radiale modifiée des solutions de la forme : $u(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)K(x)$.

A quelle équation satisfait *K*(*x*) et quelles sont les conditions à imposer à cette fonction ?

3) Utilisant la méthode polynomiale, on recherche des solutions *K*(*x*) de la forme $K(x) = x^s \sum_{\gamma=0}^{\infty} a_\gamma x^\gamma$ avec $a_0 \neq 0$, γ et *s* des entiers.
   a) Montrer que *s* doit être nécessairement égal ou supérieur à 1.
   b) ℓ étant le nombre quantique qui caractérise le moment cinétique orbital du nucléon, montrer que la solution s'écrit : $K(x) = x^{\ell+1}\left(a_a + a_2 x^2 + \ldots + a_{2p}x^{2p} + \ldots\right)$.
   c) Montrer que cette solution mathématique n'a de sens physique que si la série entière s'arrête à un certain degré, c'est-à-dire si elle se ramène à un polynôme. Utiliser alors cette condition pour obtenir les valeurs propres de l'énergie du nucléon, et donner, en fonction des variables (*r*, *θ*, *φ*) l'expression générale des fonctions d'ondes correspondantes.

4) On désigne par *n* le nombre quantique qui caractérise l'énergie du nucléon (*n nombre quantique principal*) et par $\nu - 1$ le nombre de nœud de la fonction radial (ν *nombre quantique radial*). Donner l'expression de *n* et fonction de ℓ et de ν. Quelles sont les valeurs possibles pour *n* ?

   Nota bene : lorsque pour une certaine valeur de r la fonction radiale *R*(*r*) s'annule et change de signe, on dit que *R*(*r*) possède un nœud. On admettra dans notre problème que tous les zéros de la fonction radiale correspondent à des valeurs réelles de *r*.

5) On s'intéresse à une catégorie donnée de nucléons (*neutrons ou protons*) et on utilise la nomenclature $\nu\ell^j$ pour définir l'état d'un nucléon, *j* étant le nombre quantique qui caractérise le moment cinétique total du nucléon.

   Etudier la dégénérescence des valeurs propres de l'énergie, et compte tenu du principe d'exclusion de Pauli, établir la relation qui donne le nombre de nucléons d'une même espèce ayant une énergie caractérisée par le nombre *n*. Tracer un diagramme énergétique représentant la dégénérescence.

   Nota bene : dans la nomenclature $\nu\ell^j$ la valeur de ℓ est remplacée par le symbole correspondant dans la notation spectroscopique :

l	0	1	2	3	4	5	…
Symbole	*s*	*p*	*d*	*f*	*g*	*h*	…

Exemple : état $2d^{1/2}$ $\nu = 2$, $l = 2$, $j = ½$

Exercice 9 : Les questions 1), 2) et 3) sont indépendantes

1) On considère une réaction nucléaire $X(a,\ b)Y$.
   a) Écrire le bilan énergétique de la réaction en fonction des masses atomiques
   b) Comment s'écrit ce bilan en fonction des énergies de liaison ?
   c) Appliquer ces résultats à la réaction de fusion thermonucléaire ${}^3_1H(d,\ n){}^4_2He$.

2) Montrer que le bilan de toute réaction du type $X(d,\ n)Y$ peut se mettre sous la forme $Q = S_p(Y) - E_L(d)$

où $S_p(Y)$ est l'énergie de séparation d'un proton du noyau résiduel Y et $E_L(d)$, l'énergie de liaison du deuton.

Appliquer ce résultat à la réaction de fusion du tritium ${}^3_1H\left(d,\ n\right){}^4_2He$ de l'exercice précédent.

3) Écrire le bilan des réactions de désintégration β^+ et β^- d'un noyau ${}^A_ZX$ en fonction des masses atomiques :

$$\beta^-:\ {}^A_ZX \rightarrow {}^{\ A}_{Z+1}Y + \beta^- + \bar{\nu} + Q_{\beta^-}$$

$$\beta^+:\ {}^A_ZX \rightarrow {}^{\ A}_{Z-1}Y + \beta^+ + \nu + Q_{\beta+}$$

Quelles sont les conditions respectives pour que les désintégrations β^+ et β^- soient possibles ?

Exercice 10 :

Dans le modèle de la goutte liquide, l'énergie de liaison totale d'un noyau de nombre de masse A et de numéro atomique Z est donnée par la formule semi-empirique de masse de Von Weizsäcker :

$$B\left(A,Z\right)=a_v.A-a_s.A^{2/3}-a_c.Z^2.A^{-1/3}-a_a.\frac{\left(A-2Z\right)^2}{A}+\delta.a_p.A^{-3/4}$$

où δ est un coefficient pouvant être égal à −1, 0 ou +1 et a_v, a_s, a_c, a_a et a_p des constantes qu'on prendra telles que : a_v = 15,7 MeV ; a_s = 18,6 MeV a_c = 0,72 MeV ; a_a = 24 MeV ; a_p = 33 MeV

1) Expliciter les différents termes de la formule semi-empirique de masse. A quoi correspondent les trois valeurs possibles de δ ?
2) Montrer, en donnant les expressions des coefficients α, β et γ, que les masses des atomes isobares de nombre masse A peuvent se mettre sous la forme $M\left(A,Z\right)=\alpha.Z^2+\beta.Z+\gamma$
3) Établir l'expression du numéro atomique de l'élément le plus stable d'une série isobarique de nombre de masse A <u>impair</u>. En déduire l'élément le plus stable de la série isobarique suivante :

${}^{63}_{26}Fe$	${}^{63}_{27}Co$	${}^{63}_{28}Ni$	${}^{63}_{29}Cu$	${}^{63}_{30}Zn$	${}^{63}_{31}Ga$

4) Calculer les excès de masse de ces différents éléments.
5) En justifiant les réponses, donner toutes les désintégrations radioactives qui peuvent se produire entre <u>ces</u> différents éléments ?
6) Calculer pour chacune de ces désintégrations, l'énergie cinétique maximale des particules émises.

Exercice 11 :

On se propose de calculer la valeur du coefficient a_c d'interaction coulombienne de la formule semi-empirique de masse de Von Weizsäcker en utilisant 2 noyaux-miroirs.

1) Rappeler l'expression de l'énergie de liaison totale $B\left(A,Z\right)$ d'un noyau ${}^A_ZX$ dans le modèle de la goutte liquide de Von Weizsäcker.
2) Soit la réaction nucléaire ${}^{\ A}_{Z+1}X + {}^1_0n \rightarrow {}^A_ZY + {}^1_1p$. Exprimer le bilan énergétique Q de cette réaction en fonction :
   a) Des excès de masse.
   b) Des énergies de liaison totales.
3) On considère que les isobares ${}^{\ A}_{Z+1}X$ et ${}^A_ZY$ sont des noyaux-miroirs, c'est-à-dire que le nombre de protons de l'un est égal au nombre de neutrons de l'autre (et réciproquement).
   a) Montrer que pour ces noyaux, on a nécessairement A = 2Z + 1.

b) En exprimant la différence entre les énergies de liaison totales des 2 noyaux, établir une relation entre Q, a_c et A.

c) Déterminer alors la valeur de a_c en appliquant les considérations précédentes aux noyaux-miroirs ${}^{19}_{10}Ne$ et ${}^{19}_{9}F$.

Exercice 12 :

On envoie des deutons $\left({}^{2}_{1}d\right)$ d'énergie cinétique T_d = 3,39 MeV sur une cible de béryllium ${}^{9}_{4}Be$. On détecte les neutrons $\left({}^{1}_{0}n\right)$ émis au cours de la réaction nucléaire, en mesurant leur énergie cinétique T_n à l'angle d'émission θ = 10°.

1) Écrire la réaction nucléaire produite.
2) Calculer le bilan énergétique dans le cas où le noyau résiduel est produit dans son état fondamental.
3) L'équation en Q de la réaction nucléaire peut être mise sous la forme : $Q = aT_n + b\sqrt{T_n} + c$.
   a) Préciser, pour la réaction considérée ici, les valeurs des coefficients a, b et c <u>avec</u> leurs unités.
   b) En déduire l'énergie des neutrons émis avec un noyau résiduel produit dans son état fondamental.
4) Le spectre en énergie des neutrons émis présente plusieurs pics apparaissant à différentes énergies T_n. Un de ces pics est en particulier situé à l'énergie T_n = 4,2 MeV.
   a) Montrer que ce pic correspond à un <u>noyau résiduel</u> produit dans un état excité.
   b) Calculer l'énergie d'excitation correspondante.

Exercice 13 :

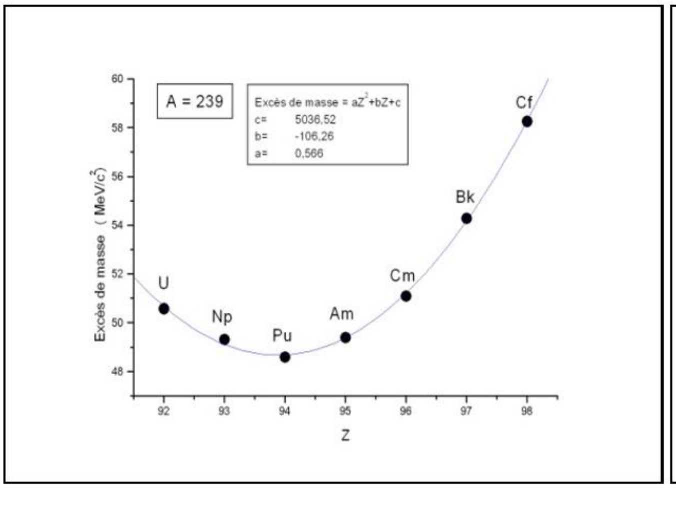
Dans le modèle de la goutte liquide, on montre que les masses des atomes isobares de nombre de masse A dépendent de façon quadratique de leur numéro atomique Z par la relation suivante :

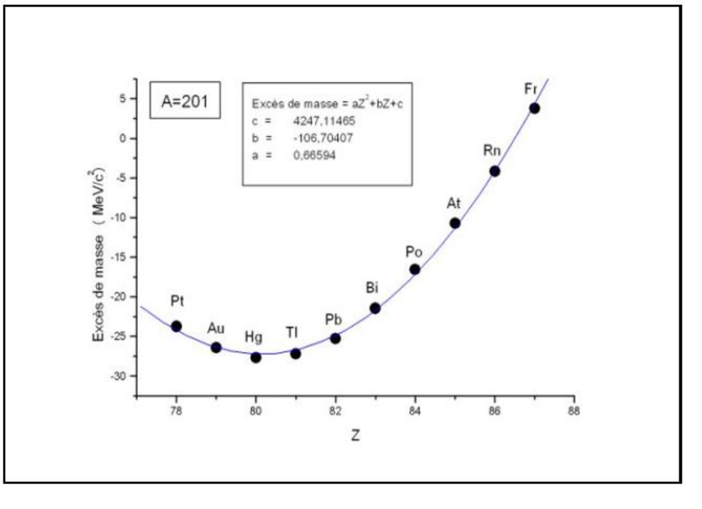
$M(A, Z)c^2 = aZ^2 + bZ + c - \delta . a_p . A^{-3/4}$ avec δ = 0 pour A **impair** ; δ = +1 pour A **pair** et Z pair ; δ = −1 pour A **pair** et Z impair.

1) Montrer que :

$$a = \frac{a_c}{A^{1/3}} + \frac{4a_a}{A} \quad ; \quad b = \left(M_H - M_n\right)c^2 - 4a_a \quad ; \quad c = \left(M_n c^2 - a_v + \frac{a_s}{A^{1/3}} + a_a\right)A$$

2) Utiliser les deux courbes isobares suivantes pour déterminer des valeurs pour les constantes a_v, a_s, a_c, a_a.





3) Donner les différents processus de désintégration β qui peuvent se produire dans les deux séries isobariques. Préciser dans chaque cas les énergies cinétiques maximales des particules émises.